ARCHIV FÜR METEOROLOGIE, GEOPHYSIK UND BIOKLIMATOLOGIE

HERAUSGEGEBEN VON

DOZENT DR. W. MÖRIKOFER
PHYSIKALISCH-METEOROLOGISCHES OBSERVATORIUM DAVOS

PROF. DR. F. STEINHAUSER
ZENTRALANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK WIEN

SERIE A
METEOROLOGIE UND GEOPHYSIK

BAND I, 1. HEFT
MIT 35 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 30. JUNI 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Arch. Met. Geoph. Biokl. A.

Serie A, Band I **Inhaltsverzeichnis** Heft 1

Seite

Courvoisier, P. Über Luftdruckvariographen und Luftdruckschwankungen. (Mit 10 Textabbildungen) 1

Defant, A. Über interne Gezeitenwellen und ihre Stabilitätsbedingungen. (Mit 17 Textabbildungen) 39

Reuter, H. Über die Theorie des Wärmehaushaltes einer Schneedecke. (Mit 5 Textabbildungen) 62

Burkard, O. Ionosphärenbeobachtungen im Polargebiet. (Mit 3 Textabbildungen) 93

Bouët, M. Méthode de comparaison des régimes pluviaux en météorologie synoptique 100

Eckel, O. Über die mechanischen Arbeitsgrößen der Binnenseen 108

Toperczer, M. Beitrag zur Methodik der magnetischen Landesaufnahme 127

Götz, F. W. Paul. Eine Anregung zur Nordlichtphotographie 141

Das

„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie“

erscheint in zwangloser Folge in zwei parallelen Serien:

Serie A Meteorologie und Geophysik: Allgemeine, theoretische und synoptische Meteorologie, Geophysik der Atmosphäre, des Meeres und des festen Erdbodens.

Serie B Allgemeine und biologische Klimatologie: Allgemeine und medizinische Klimatologie, Agrar- und Mikroklimatologie, Meteorobiologie, Strahlungsforschung.

Die beiden Serien können unabhängig voneinander bezogen werden. Die Hefte werden einzeln berechnet und zu Bänden von 25—30 Bogen vereinigt.

Das Archiv soll wissenschaftlich einwandfreie Arbeiten von allgemein fachlichem Interesse veröffentlichen. Es werden deshalb nur Originalarbeiten aufgenommen, die neue Erkenntnisse bringen, und zwar Aufsätze größeren Umfanges wie auch kleine Mitteilungen. Gelegentlich wird auch durch Sammelreferate über die neuesten Ergebnisse einzelner Spezialgebiete ein Überblick über den jeweiligen Stand eines bestimmten Problems gegeben werden, wobei besonders durch Hervorheben der noch ungelösten Fragen der weiteren Forschung Anreiz geboten werden soll. Schließlich werden auch kritische Buchbesprechungen auf bedeutende Neuerscheinungen aus unserem Wissensgebiet hinweisen.

Die Verfasser werden gebeten, den Text möglichst knapp zu fassen und historische Einleitungen tunlichst zu vermeiden. In den beigegebenen Tabellen ist die Wiedergabe unverarbeiteten, umfangreichen Beobachtungsmaterials zu vermeiden; auch sollen die Resultate im allgemeinen nicht durch Tabellen und Kurven gleichzeitig wiedergegeben werden. Die Tabellen sollen eine Überschrift tragen.

Die Arbeiten können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung in mindestens zwei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt. Die Literaturhinweise erfolgen durch im laufenden Text in Klammern eingefügte Nummern, die genaue Zitate bezeichnen, die in einem Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit zusammenzustellen sind.

Die Manuskripte sind gewöhnlich in Maschinenschrift auf einseitig beschriebenen, fortlaufend paginierten Blättern abzufassen. Abbildungsvorlagen sind in so sauberer Wiedergabe einzusenden, daß sie entweder unverändert verwendet oder durch Zeichner des Verlages einwandfrei neu gezeichnet werden können. Die Beschriftung, die innerhalb der Zeichnung angebracht wird, ist nur mit weichem Bleistift einzutragen. Unterschriften zu den Zeichnungen werden im Druck wiedergegeben, ihre Vorlagen sollen dem Manuskript direkt beigegeben werden.

Es können grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; die Autoren sind verpflichtet, auch nachträglich bis mindestens zum 31. Dezember des auf das Erscheinen folgenden Kalenderjahres ihre Arbeit nicht anderweitig in gleicher oder ähnlicher Form zu veröffentlichen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

551.541 : 551.543 : 551.551

(Aus dem Physikalisch-Meteorologischen Observatorium Davos,
Direktor: P. D. Dr. W. Mörikofer.)

Über Luftdruckvariographen und Luftdruckschwankungen.

Eine Zusammenfassung.

Von

P. Courvoisier.

Mit 10 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Literaturangaben über Luftdruckschwankungen, besonders über diejenigen mit kleinerer Schwankungsdauer, sind sehr verstreut und uneinheitlich. Ähnlich sind die Angaben über die Wirkungsweise der zur Messung benützten Instrumente (Variographen) meist ungenügend und es fehlt eine allgemeingültige Darstellung dieser Wirkungsweise. Diese Darlegung wird im ersten und zweiten Teil der vorliegenden Veröffentlichung durchgeführt mit dem Ergebnis, daß die Wirkungsweise eines Variographen durch eine Kennfunktion (Frequenzcharakteristik) beschrieben wird, die gewisse Zeitkonstanten (Apparatkonstanten) enthält.

Der dritte und vierte Teil der vorliegenden Arbeit gibt eine zusammenfassende Darstellung der bisherigen Kenntnisse über Luftdruckschwankungen und veranschaulicht die Zusammenhänge durch ein Diagramm der Amplituden und Frequenzen der beobachteten Schwankungen. In diesem Diagramm bilden sich Druckschwankungen mit geophysikalisch verschiedenen Ursachen an getrennten Stellen ab, es läßt sich zumindest ein „Windband" von einem „Band" längerdauernder Druckschwankungen unterscheiden, das auch die von Zyklonen herrührenden Schwankungen enthält. Es ist anzunehmen, daß dieses letztere Band von Druckschwankungen die Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre verdeckt, für die nach theoretischen Daten ein Spektrum gezeichnet wird. Vielleicht ist es möglich, in niederen Breiten, wo eine andere Lage des verdeckenden Bandes von Druckschwankungen zu erwarten ist, die Eigenschwingungen mit Hilfe von Variographen zu finden, die auf Windstöße nicht ansprechen und genügend große Empfindlichkeit besitzen.

Die Konsequenzen aus der gegebenen Zusammenstellung von Luftdruckschwankungen für die Einwirkung dieser Schwankungen auf den menschlichen Organismus werden später in Serie B dieser Zeitschrift gezogen werden.

Summary. The data put down in literature on the variations of atmospheric pressure, in particular on oscillations of a short period, are very dispersed and inconsistent. The data concerning the functioning of the measuring instruments (variographs) are equally insufficient in general and a complete presentation

of this functioning is missing. In chapter I and II of the present paper this presentation is given with the result that the functioning of a variograph is described by a characteristic function of frequency containing certain instrumental constants.

Chapter III and IV of this paper give a summarising exposé of what is known to-day on oscillations of pressure and illustrate the mutual relations by a diagram of the amplitudes and frequencies of the really observed variations. This diagram shows variations of pressure of different origin at different places; at least you may distinguish a group of oscillations of short periods caused by gusts of wind from a group of longer periods also comprising the variations due to atmospheric depressions. It may be assumed that the latter group of variations covers the Eigen-oscillations of the total atmosphere for which a spectrum has been drawn according to theoretical data. In lower latitudes, where another position of the covering frequency band of pressure variations may be expected, it will be perhaps possible to find the natural atmospheric oscillations by the aid of variographs not susceptible to wind gusts and of sufficient sensibility.

The consequences from the given data and the influence of the variations of pressure on human organism will be treated in series B of this review.

Résumé. Les données que l'on trouve dans la littérature sur les variations de pression, en particulier sur les oscillations à courte période, sont très dispersées et disparates. Les données concernant le fonctionnement des appareils de mesure (variographes) sont également insuffisantes en général et un exposé complet de ce fonctionnement fait défaut. Les deux premières parties de la présente étude contiennent cet exposé; il en ressort que le fonctionnement d'un variographe peut s'exprimer au moyen d'une fonction caractéristique de la fréquence contenant certaines constantes instrumentales.

Les troisième et quatrième parties de cette étude donnent un exposé d'ensemble de ce que l'on sait aujourd'hui des oscillations de pression et en illustre les relations mutuelles par un diagramme des amplitudes et des fréquences des variations réellement observées. Ce diagramme met en évidence des variations de pression d'origines différentes à des endroits différents; on peut en tout cas distinguer un groupe de oscillations à courtes périodes causées par les coups de vent et un groupe à des periodes plus longues comprenant aussi les variations dues aux dépressions atmosphériques. Il faut admettre que ce dernier groupe masque les oscillations propres de l'atmosphère entière pour lesquelles on a dressé un „spectre" d'après les données théoriques. Aux basses latitudes, où la bande des fréquences masquantes est probablement déplacée, il sera peut-être possible de mettre en évidence les oscillations propres de l'atmosphère à l'aide de variographes pas susceptible des coups de vent et suffisamment sensibles.

On traitera plus tard dans la série B de cette revue le problème de la répercussion sur l'organisme humain de ces variations de pression.

Einleitung.

H. v. HELMHOLTZ [*34*] hat vor über 50 Jahren gezeigt, daß die Grenzfläche zweier relativ zueinander bewegter Luftmassen nicht eben sein kann, sondern daß sie eine Wellenfläche werden muß. Dann muß auch das Druckfeld, d. h. die räumliche Verteilung des Druckes in den Luftmassen, eine periodische Verzerrung erfahren und man konnte hoffen,

beim Durchzug einer solchen Wellenfläche über dem Beobachtungsort periodische Schwankungen des Luftdruckes zu finden. Seit dieser Zeit hatten Geophysik und Meteorologie ein Interesse an der Erforschung der Feinstruktur des zeitlichen Druckverlaufes; denn für die Meteorologie ist das Vorhandensein einer Grenzfläche in der Atmosphäre eine Tatsache erster Ordnung und ihre Erkennung vom Boden aus war von großer Wichtigkeit, während es sich für die Geophysik um ein Problem der Mechanik der Atmosphäre handelt. Später kam noch die Meteorobiologie als dritter Interessent dazu, als man nach der Wirkung der atmosphärischen Druckschwankungen auf den menschlichen Organismus zu fragen begann. Literaturangaben über ältere Beobachtungen von kurzdauernden Luftdruckschwankungen findet man bei A. Naber [*46*], nach dessen Vermutung bereits Archimedes mit einem Wasserbarometer die Druckeffekte des Windes beobachtet haben soll. Die Untersuchung der Feinstruktur setzte in größerem Umfang jedoch erst um die Jahrhundertwende ein durch M. Toepler [*71*, *72*], W. Schmidt [*56*], N. Shaw und W. H. Dines [*65*] und andere [*17*, *33*, *41*, *74*], brachte aber außer der Entwicklung zweier Meßinstrumente (besonders durch Toepler und Shaw und Dines)[1] keine positiven Ergebnisse. Es zeigte sich, daß von den erwarteten periodischen Schwankungen des Druckes so gut wie nichts zu finden war und daß — wie Toepler sich ausdrückte — im Druckablauf die Unregelmäßigkeit die Regel ist. Neben der Schwierigkeit, diese unregelmäßigen Kurven auszuwerten, war es aber besonders die Unsicherheit über die Wirkungsweise der Luftdruckvariographen, die einer umfangreicheren Bearbeitung dieses Gebietes im Weg gestanden zu sein scheint. Diese Unsicherheit, die in den verschiedenen Referaten über Variographen von E. Kleinschmidt [*37*, *38*] deutlich zum Ausdruck kommt, ist damals entstanden, als W. Schmidt [*57*, *58*] auf Grund nicht quantitativer Überlegungen behauptet hat, daß es möglich sei, Variographen zu konstruieren, die nur den Differentialquotienten dp/dt des Druckes nach der Zeit anzeigen. Trotzdem Toepler [*71*, *72*] bereits quantitativ gezeigt hatte, wie im wesentlichen die Arbeitsweise der Variographen zu beschreiben ist, beginnt seither fast jede Arbeit über Variographen mit einer Diskussion der Bedeutung der registrierten Kurve. Dennoch fehlen oft Angaben über wichtige Eigenschaften der benützten Instrumente, so daß man nicht immer in der Lage ist, die veröffentlichten Kurven oder Zahlen auszuwerten oder ihre Auswertung zu kontrollieren [*1*, *53*]. Es erscheint daher nicht überflüssig, im folgenden zunächst in übersichtlicher Schreibweise diese Rechnungen zusammenzufassen.

I. Die Kennfunktion von Variographen.

Allen Variographen ist als Bauprinzip gemeinsam, daß man die Differenz des Atmosphärendruckes gegen den Druck in einem Gefäß zur

[1] Der Mikrobarograph von Shaw-Dines wurde von S. Fujiwhara [*18*], sowie von S. Suzuki und H. Oomori [*69*] weiter entwickelt.

Messung bringt. Damit man aus dem zeitlichen Verlauf dieser Differenz einen Schluß auf den Verlauf des Atmosphärendruckes ziehen kann, ist es dabei nötig, den Druckablauf im Gefäß zu kennen. Die einfachste Lösung, den Druck im Gefäß zeitlich konstant zu halten, führt auf Typen ähnlich wie die Barographen. Da die Anzeigeskala der Instrumente stets linear mit der Druckdifferenz ist, so muß man die Empfindlichkeit so klein wählen, daß auch die größten auftretenden Differenzen noch aufgezeichnet werden können. Will man dennoch eine große Empfindlichkeit haben, so muß man die größtmögliche Druckdifferenz klein halten, was nur zu erreichen ist, wenn man den Druck im Gefäß dem Verlauf des Atmosphärendruckes in geeigneter Weise nachführt. Dies kann sprungweise geschehen, etwa wie beim Mikrobarographen von SUCKSTORFF [*68*], bei dem beim Erreichen einer maximalen Druckdifferenz (Skalenrand) durch kurzzeitiges Öffnen eines Ventils ein Druckausgleich zwischen Gefäß und Atmosphäre erreicht wird, so daß die Registrierfeder auf ihren Nullpunkt zurückkehrt. Man überlegt leicht, daß für Druckschwankungen (Schwingungen) mit großer Periodendauer die Kurvenstücke ohne weiteres zusammensetzbar sind, daß aber für Periodenlängen in der Größenordnung der Öffnungszeit des Ventils und kleiner die Zusammensetzbarkeit vollständig verlorengehen kann, wenn die Amplituden eine gewisse Größe überschreiten; die Kurven wären dann nicht mehr auswertbar. Die Nachführung des Innendruckes im Gefäß kann aber auch kontinuierlich erfolgen, und das ist die am häufigsten angewandte Methode. Man verbindet dazu das Gefäß durch einen Strömungswiderstand (enges Rohr, Düse, Nadelventil oder ähnliches, gelegentlich „Dämpfung" genannt) mit der Atmosphäre, so daß vorhandene Druckdifferenzen sich kontinuierlich ausgleichen können. Es ist ohne weiteres verständlich, daß nun der Druckverlauf im Innern des Gefäßes ebenfalls vom Druckverlauf außen abhängt, und es gilt zu berechnen, wie unter diesen Verhältnissen die registrierte Kurve der Druckdifferenz zu deuten ist.

Um hierfür einen Ausgangspunkt zu gewinnen, setzen wir für den Gasstrom J, der durch den Strömungswiderstand R von der Druckdifferenz $p_a - p_i$ des Außendruckes gegen den Innendruck hindurchgetrieben wird, ein „Ohmsches Gesetz" an, schreiben also

$$p_a - p_i = JR, \tag{1}$$

wobei der Gasstrom J als Massenstrom (Dimension: Masse pro Zeiteinheit) angesehen werden soll. Die Benützung dieses einfachen Gesetzes ist stets gestattet, wenn es sich um quasistationäre Strömungen handelt. Für nicht zu große Druckdifferenzen $p_a - p_i$ können wir bis zu den höchsten interessierenden Frequenzen hinauf mit einem konstanten Wert von R rechnen. Der Strömungswiderstand R ließe sich für enge Rohre aus dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz ermitteln, für andere Ausführungsformen des Widerstandes wäre diese Ermittlung allerdings schon schwieriger. Da wir aber den Zahlenwert von R nicht brauchen werden, können wir auf seine Angabe ganz verzichten.

Betrachten wir nun das Gas im Innern des Gefäßes, so gilt nach den Gasgesetzen die Beziehung

$$\frac{dp_i}{p_i} + n\frac{dv}{v} = 0, \tag{2}$$

wobei n zwischen 1 und c_p/c_v liegt, je nachdem man es mit mehr isothermer oder mehr adiabatischer Ausdehnung des Gases zu tun hat. Der Polytropenexponent n wird dabei von der Frequenz der Druckschwankungen abhängen, da rasche Druckänderungen adiabatisch, langsame dagegen annähernd isotherm vor sich gehen werden, je nach Wärmekapazität und Isolierung des Gefäßes. Eine solche Isolierung ist selbstverständlich nötig, da sonst bei konstantem Atmosphärendruck die Temperaturschwankungen des Gases im Gefäß Druckschwankungen vortäuschen würden.[1] Da das Gefäßvolumen V konstant ist, so ist dv in (2) offenbar das aus- oder einströmende Gasvolumen, das mit der strömenden Gasmasse durch

$$dv = -\frac{1}{\varrho}\, dm$$

verbunden ist, wenn wir mit m die Gasmasse in V bezeichnen und mit ϱ ihre Dichte. Das negative Zeichen müssen wir schreiben, da ein positives dv ein Ausströmen von Gas aus dem Gefäß bedeutet, wobei die Gasmasse im Gefäß abnimmt, so daß dm negativ wird. Fragen wir nach der Gasmasse, die bei einer bestimmten Druckänderung dp_i aus- oder einströmt, so finden wir aus (2)

$$dm = \frac{\varrho\, v}{n\, p_i}\, dp_i = \frac{\varrho\, V}{n\, p_a}\, dp_i, \tag{2a}$$

da vor Beginn der Druckänderung $v = V$ und $p_i = p_a$ ist. Setzen wir noch

$$\frac{\varrho\, V}{n\, p_a} = C, \tag{3}$$

wobei C die Bedeutung einer Kapazität hat, und betrachten dp und dm als im Zeitelement dt vor sich gehend, so können wir schreiben

$$C\frac{dp_i}{dt} = \frac{dm}{dt} = J. \tag{2b}$$

Durch Differentiation nach der Zeit bekommen wir aus (1)

$$\frac{dp_a}{dt} - \frac{dp_i}{dt} = R\frac{dJ}{dt}, \tag{1b}$$

so daß wir jetzt dp_i eliminieren können. Dann resultiert

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C\,R} = \frac{1}{R}\frac{dp_a}{dt} \tag{4}$$

als Differentialgleichung für den Gasstrom J. Man charakterisiert nun das Verhalten eines Variographen am besten durch Angabe der Registrier-

[1] Man wird den nötigen Aufwand an Isolation am einfachsten durch Versuche (Heizen des Aufstellungsraumes) feststellen.

ausschläge, die bei periodischen Druckschwankungen gegebener Amplitude entstehen. Wir werden daher für p_a einen periodischen Verlauf entsprechend

$$p_a = \overline{p}_a + p_{ao}\, e^{i\omega t}$$

ansetzen, worin $\overline{p}_a$ der mittlere Gesamtdruck und p_{ao} die Amplitude der mit der Kreisfrequenz ω erfolgenden Schwingung ist. Damit wird (4) wenn wir in C noch den Momentandruck p_a durch $\overline{p}_a$ ersetzen

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{CR} = i\,\frac{\omega\, p_{ao}}{R}\, e^{i\omega t}. \tag{4a}$$

Ihre Lösung, die selbstverständlich periodisch ist, setzen wir

$$J = J_o\, e^{i(\omega t + \varphi')}$$

und erhalten durch Einsetzen in (4a) nach kurzer Umformung

$$J_o = \frac{p_{ao}\,\omega\, C}{1 + \omega^2 \tau'^2}\,(1 - i\,\omega\,\tau')\; i\, e^{-i\varphi'}, \tag{5}$$

worin wir zur Abkürzung noch $RC = \tau'$ geschrieben haben. Als direkt meßbare Größe muß die Amplitude J_o des Gasstromes reell sein, so daß in (5) einmal

$$J_o = \frac{p_{ao}\,\omega\, C}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}} = \frac{p_{ao}}{R}\,\frac{\omega\,\tau'}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau'^2}} = \frac{p_{ao}}{R}\,\Phi'(\omega\,\tau') \tag{6}$$

sein muß, wobei in (6) noch einmal mit R erweitert ist. Diese Gleichung beschreibt uns die Frequenzabhängigkeit der Amplitude des Gasstromes. Anderseits folgt aus (5) noch

$$i\, e^{-i\varphi' - \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau'} = 1$$

oder

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau' \tag{7}$$

als Gleichung für die zu $\Phi'(\omega\,\tau')$ gehörende Phasenverschiebung zwischen p_a und J.

Den Wert der Größe τ', die die Dimension einer Zeit hat, findet man leicht, wenn man bei unverändertem Außendruck den zeitlichen Verlauf des Ausgleiches einer bestehenden Druckdifferenz betrachtet. Hiefür gilt die Gleichung (4), in der nun $dp_a/dt = 0$ ist. Ihre direkte Integration liefert bekanntlich

$$J(t) = J(o)\, e^{-t/\tau'}, \tag{8}$$

so daß τ' als Zeitkonstante des exponentiell verlaufenden Druckausgleichs erscheint. Für die bequemer meßbare Halbwertszeit Θ, d. h. die Zeit, nach der die anfängliche Druckdifferenz auf die Hälfte abgesunken ist, sei an den Zusammenhang

$$\tau' = \frac{\Theta}{\ln 2} = 1{,}443\,\Theta \tag{9}$$

erinnert.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Druckdifferenz $p_a - p_i$ zu messen:

1. Man benützt ein Differentialmanometer, also etwa eine einseitig an das Gefäß angeschlossene Membran, deren Verbiegung mechanisch, optisch oder elektrisch gemessen wird, oder ein Flüssigkeitsmanometer, dessen Stellung man photographisch registriert, oder ähnliches. Ruft dann eine unveränderliche Druckdifferenz der Größe 1 (etwa mm Hg oder dyn/qcm) einen Ausschlag der Membran von der Größe a hervor, so findet man aus (1) und (6) für die beobachtete Ausschlagsamplitude a_o einer Schwankung

$$a_o = a\,(p_a - p_i) = a\,p_{ao}\,\Phi'\,(\omega\,\tau'). \tag{10}$$

2. Man benützt einen Gasströmungsmesser in der Verbindung zwischen Gefäß und Atmosphäre, die den Widerstand R enthält. Stauränder oder -düsen kommen hier nicht in Frage, da die Strömungen zu schwach sind, hingegen kann man nach H. Benndorf und W. Zimmermann [*4*] einfach ein „Windrädchen" an einem Quarzfaden in die Strömung hängen und kann so wenigstens photographisch registrieren. Bequemer ist es, wenn man Verstärkungsverfahren benützen kann, indem man Wärme von einem elektrisch geheizten Drahtgitter je nach der Strömungsrichtung zu zwei zum ersten symmetrisch angeordneten Drahtgittern transportieren läßt, die zwei Zweige einer Wheatstone-Brücke bilden, vgl. etwa M. J. E. Golay [*19*]. Oder man kann nach W. Schmidt [*57*, *58*, *59*] als strömendes Gas ein brennbares Gas nehmen und hat dann in der mit der Strömung transportierten Verbrennungswärme sehr viel mehr Energie für ein Anzeigesystem zur Verfügung als in der Energie der Strömung selbst. Für alle diese Strömungsmesser gilt Gleichung (6).

Bei beiden Arten der technischen Ausführung der Meßvorrichtung spielt also die durch (6) definierte Funktion $\Phi'\,(\omega\,\tau')$ eine Rolle. Ihr Verlauf ist leicht zu beschreiben: für kleine $\omega\,\tau'$ und damit auch für kleine Frequenzen ω, da τ' ja eine Apparatkonstante ist, ist Φ' proportional zu ω. Gleichzeitig ist nach (7) für kleine ω die Phasenverschiebung $\pi/2$, so daß für sinusförmigen Druckverlauf $p_a\,(t)$ die Registrierkurve den Differentialquotienten dp_a/dt wiedergibt. In diesem Frequenzbereich ist also wenigstens für periodische Druckschwankungen die Behauptung W. Schmidts über die Wirkungsweise seines Variographen erfüllt. Schmidt hat seine Behauptung nicht quantitativ begründet, sein Gedankengang dürfte aber so wie der von G. von dem Borne [*8*] auszudrücken sein, der Gleichung (4) aufstellt und sich die Größe $CR = \tau'$ so klein gemacht denkt, daß dJ/dt neben J/τ klein wird. Selbstverständlich ist das keine genügende Lösung der Aufgabe. Der weitere Verlauf von Φ' ist der eines asymptotischen Einlaufens in den Wert 1 für größere ω. Für genügend große Werte von ω würde also jeder Variograph frequenzunabhängig in seiner Anzeige sein.

Ob diese Frequenzunabhängigkeit für den Variographen als Ganzes wirklich besteht, hängt nun noch von der von den Eigenschaften des Druckausgleiches ganz unabhängigen Frequenzkurve des Anzeigesystems

ab. Hiervon ist aber, außer in der zitierten Arbeit von Benndorf und Zimmermann [4], wo das Anzeigesystem vorbildlich genau in seinen Eigenschaften diskutiert wird, in den Arbeiten über Variographen fast nie die Rede.

Für alle Anzeigesysteme, die einer Eigenschwingung fähig sind (Fall a), also etwa beim Benndorf-Variographen das Windrädchen an seinem Aufhängefaden, oder ein Flüssigkeitsmanometer, dessen Flüssigkeit ja Trägheit besitzt, oder das Registriergalvanometer eines Kapazitätsvariographen,[1] für alle diese Systeme gilt als Frequenzkurve die Amplitudenkurve der Lösungen der Schwingungsgleichung für den Dämpfungszustand des Systems, in dem es sich befindet. Von dieser „Resonanzkurvenschar", die man in Lehrbüchern der Mathematik findet, etwa bei R. Courant [9], ist immer die Kurve mit aperiodischer Dämpfung die günstigste. Kann man die Dämpfung variieren — und das sollte möglichst der Fall sein — so bestimmt man zunächst bei sehr kleiner Dämpfung (sehr langsames Abklingen einer einmal angestoßenen Schwingung) die Eigenperiode τ_a'' dieser Schwingung und dämpft dann so stark, daß das angestoßene System gerade in den Nullpunkt zurückkehrt ohne darüber hinaus zu schwingen. Ist dann k_o die Amplitude der das Anzeigesystem bewegenden Kraft, so ist in diesem Fall der aperiodischen Dämpfung die Amplitude x_o der Registrierfederbewegung mit einer Konstanten d (Direktionskraft)

$$x_o = \frac{k_o}{\mathrm{d}} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4 \tau_a''^4}} = \frac{k_o}{\mathrm{d}} \Phi_a''(\omega \tau_a''). \tag{11}$$

Diese Gleichung wird ergänzt durch die zugehörige Phasengleichung

$$\varphi_a'' = \operatorname{arc\,tg} \omega \tau_a'' \frac{\sqrt{2}}{1 - \omega^2 \tau_a''^2} \tag{11a}$$

für die Phasenverschiebung zwischen der Kraft und der Schreibfederbewegung.

Für nicht schwingungsfähige Anzeigesysteme (Fall b), wie es etwa das beim Schmidtschen Variographen über — nicht in! — der Registrierflamme angebrachte Bimetall mit Schreibhebel darstellt oder für aus irgend welchen Gründen stark überaperiodisch gedämpfte schwingungsfähige Systeme findet man, daß ihre Einstellung auf einen Gleichgewichtszustand exponentiell erfolgt. Beim Bimetall des Schmidt-Variographen etwa kann man das experimentell durch Abstoppen der Wanderung des Zeigers bei einmaliger Änderung der Flammenhöhe leicht feststellen und mit ausreichender Genauigkeit eine Zeitkonstante τ_b'' dieser Einstellung bestimmen. Von solchen Systemen ist bekannt, daß für sie eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung gilt:

$$r \frac{dx}{dt} + \mathrm{d}\, x + k = 0, \tag{12}$$

[1] Die Eigenschwingungen der Membranen eines solchen Variographen werden ja meist im akustischen Gebiet, also bei für uns unendlich hohen Frequenzen liegen und spielen daher keine Rolle. Dagegen ist die Frequenzcharakteristik eines allenfalls eingeschalteten Verstärkers von Bedeutung.

wobei wieder x die Auslenkung gegen die Nullstellung auf dem Registrierstreifen und k die äußere wirkende Kraft ist. Wenn k konstant ist, so liefert (12) eben gerade eine exponentielle Einstellung auf eine Gleichgewichtslage, wobei die Zeitkonstante

$$t_b'' = \frac{r}{\mathrm{d}}$$

wird. Nehmen wir k periodisch, also

$$r\frac{dx}{dt} + \mathrm{d}\,x + k_o\, e^{i\,\omega t} = o, \tag{12a}$$

so folgt mit dem Ansatz

$$x = x_o\, e^{i\,(\omega t + \varphi_b'')}$$

nach Umformung

$$x_o = \frac{k_o}{\mathrm{d}} \frac{e^{-i\varphi_b''}}{1 + \omega^2 \tau_b''^2}\,(i\,\omega\,\tau_b'' - 1). \tag{13}$$

Da auch hier wieder die Registrieramplitude x_o reell sein muß, so wird

$$x_o = \frac{k_o}{\mathrm{d}} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_b''^2}} = \frac{k_o}{\mathrm{d}}\,\Phi_b''(\omega\,\tau_b'') \tag{14}$$

und

$$\varphi_b'' = \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau_b''. \tag{14a}$$

Für k_o haben wir bei den oben betrachteten Meßsystemen der ersten Art die Ausschlagsamplitude a_o der Membran, bei Systemen der zweiten Art die Gasstromamplitude J_o einzusetzen. Es resultiert also für die gesuchte Relation zwischen Registrieramplitude und Amplitude der Druckschwankung für Systeme der ersten Art (Differentialmanometer)

$$x_o = p_{ao}\frac{a}{\mathrm{d}}\,\Phi'(\omega\,\tau')\,\Phi_{a,b}''(\omega\,\tau_{a,b}'') = p_{ao}\frac{a}{\mathrm{d}}\,\Phi_{a,b}(\omega\,\tau';\,\omega\,\tau_{a,b}'') \tag{15}$$

und für Systeme der zweiten Art (Gasströmungsmesser)

$$x_o = p_{ao}\frac{1}{R\,\mathrm{d}}\,\Phi_{a,b}(\omega\,\tau';\,\omega\,\tau_{a,b}''). \tag{16}$$

Die Phasengleichung des Gesamtvariographen wird durch Addition von (7) zu (11a) oder (14a)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau' + \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau_a'' \frac{\sqrt{2}}{1 + \omega^2 \tau_a''^2} \\ \text{bzw.}\qquad \varphi_b &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau' + \operatorname{arc\,tg}\,\omega\,\tau_b'' \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

für beide Systemarten. Für eine gegebene Einstellung eines Variographen sind τ' und τ'' Konstante, wobei τ' durch Änderung des Strömungswiderstandes R meist leicht und stetig verändert werden kann, während τ'' nur durch Umbau des Anzeigesystems zu ändern sein dürfte. Wir werden daher für einen Variographen τ'' als fest und $\tau' = \beta\,\tau''$ als

Parameter betrachten. Wir haben dann als „Kennfunktion" des Variographen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_a(\omega\tau_a'';\beta) &= \frac{\omega\tau_a''\beta}{\sqrt{1+\omega^2\tau_a''^2\beta^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\omega^4\tau_a''^4}} \\ \text{bzw.}\quad \Phi_b(\omega\tau_b'';\beta) &= \frac{\omega\tau_b''\beta}{\sqrt{1+\omega^2\tau_b''^2\beta^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_b''^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

für die Amplitude und (17) für die Phase zur Kennzeichnung des Frequenzverhaltens. Der Verlauf der Funktionen Φ_b und φ_b ist in Abb. 1

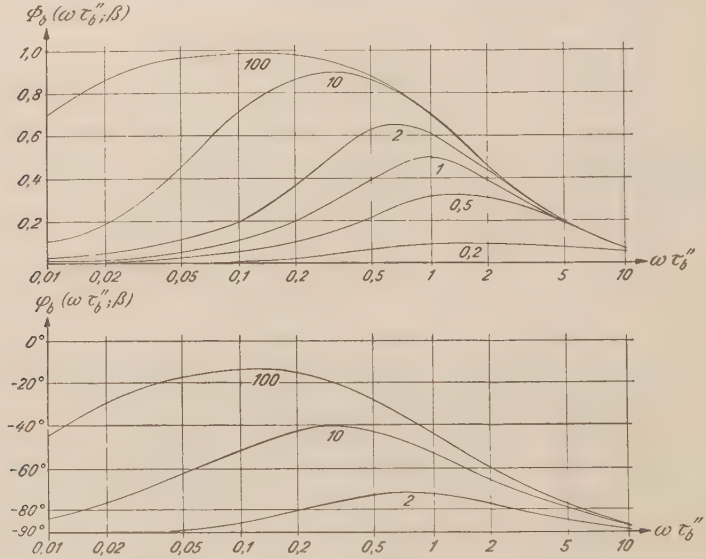


Abb. 1. Kennfunktion für verschiedene Parameterwerte β.

gezeichnet für einen logarithmischen Maßstab der Abszisse $\omega\tau_b''$, die bei bekannten τ_b'' ohne weiteres in eine Frequenzachse verwandelt werden kann. Über der logarithmischen Abszisse wird Φ_b eine symmetrische Glockenkurve, es gibt also ein Gebiet maximaler Empfindlichkeit des Variographen.

Dies letztere gilt auch für schwingungsfähige, aperiodisch gedämpfte Anzeigesysteme, bei denen der Radikand des zweiten Faktors in (18) etwas anders aussieht, jedoch wird Φ_a nicht mehr symmetrisch, der Abfall nach hohen $\omega\tau_a''$ bzw. ω zu ist steiler.

Man könnte denken, daß es für die Erforschung der atmosphärischen Druckschwankungen günstig wäre, einen über $\log\omega$ möglichst rechteckigen Kennfunktionsverlauf zu haben, also ein Gebiet scharfbegrenzter und frequenzunabhängiger Empfindlichkeit. Wie wir noch sehen werden, nehmen im allgemeinen die Druckschwankungen in der Atmosphäre mit

zunehmender Frequenz ab, so daß besonders ein schärferes Abfallen der Kennfunktion bei niedrigen Frequenzen erwünscht wäre. Leider läßt sich dies nicht erreichen, wie wir rasch zeigen wollen.

Wir stellen dazu die als „Ersatzschaltung" bezeichnete mechanisch-elektrische Analogie auf. Man sieht sofort, daß ein System nach Abb. 2 einer zu (4) analogen Differentialgleichung gehorcht, wenn wir die Druckschwankung durch eine Wechselspannung $U_{\sim}$ ersetzen, sowie den Strömungswiderstand durch einen Ohmschen Widerstand R und das Gefäß durch einen Kondensator C. Die in einem solchen System bestehende Wechselstromamplitude J_0 errechnet man dann nach einer zu (6) analogen

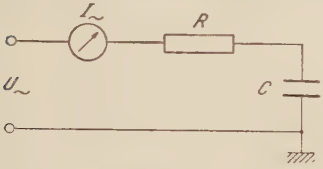


Abb. 2.

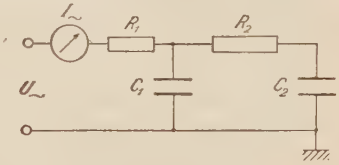


Abb. 3.

Formel. Die Bequemlichkeit des Ersatzschaltungsbildes liegt nun darin, daß in der Wechselstromlehre gezeigt wird, daß

$$J_0 = \frac{U_0}{\Re} \tag{19}$$

ist, worin $\Re$ der komplexe Gesamtwiderstand der verwendeten Kombination von Schaltelementen ist. Für die vorliegende Schaltung verifiziert man leicht, daß aus

$$\Re = R + \frac{1}{i\,\omega\,C}$$

$$\frac{1}{|\Re|} = \frac{\omega\,C}{\sqrt{1+\omega^2\tau'^2}} \quad \text{mit} \quad \tau' = R\,C$$

folgt, wie in (6). Eine Veränderung der Form des Anteils Φ' an der Kennfunktion Φ, die wir wünschen, könnte nun offenbar nur durch Verwendung weiterer Schaltelemente hervorgebracht werden, da Änderungen von R und C bloß den Wert von τ' verändern würden. Benützen wir zwei Kondensatoren, so bestehen mehrere Schaltmöglichkeiten, von denen wir nur die aussichtsreichste nach Abb. 3 betrachten wollen. Man erhält

$$\frac{1}{|\Re|} = \frac{1}{R_1}\,\frac{\omega\,\tau_1'\sqrt{(1+\alpha)^2+\delta\,\omega^2\tau_1'^2}}{\sqrt{(1-\delta\,\omega^2\tau_1'^2)^2+\omega^2\tau_1'^2(1+\alpha+\delta)^2}} = \frac{1}{R_1}\,\Psi(\omega\tau_1'), \tag{20}$$

worin $C_1\,R_1 = \tau_1'$; $C_2\,R_2 = \tau_2'$; $C_2 = \alpha\,C_1$ und $\tau_2' = \delta\,\tau_1'$ gesetzt ist. Im Nenner ist der Radikand zu einem Polynom 4. Grades erweitert, im Zähler ist der Wurzelausdruck neu dazugetreten. Da die Parameter α und δ aber stets positiv sind, so gelingt es nicht etwa $(1+\alpha)$ gleich Null zu machen. In diesem Fall wäre ein rascherer Abfall von Ψ zu erwarten. Geht man zu drei oder mehr Kondensatoren über, so erhält

man Formeln, bei denen die Radikanden im Zähler und Nenner von (20) Polynome höheren Grades sind, wiederum aber nicht mit verschwindenden Koeffizienten der niedrigeren Potenzen.

Der einzige Vorteil, den wir aus diesen Überlegungen ziehen können, ist folgender: Will man einen Variographen haben, dessen Kennfunktion bereits bei so kleinen Frequenzen abschneidet, daß hierzu die Trägheit des Anzeigesystems noch nicht ausreicht, so kann man einen Strömungsmesservariographen nach Benndorf nehmen — der Schmidtsche eignet sich hier nicht — und eine Anordnung nach Abb. 4 verwenden. Um den

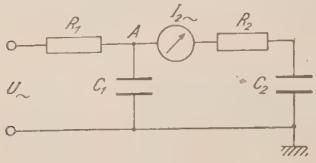


Abb. 4.

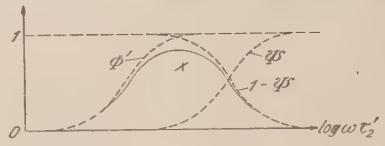


Abb. 5.

Strom $J_{2\sim}$ zu finden, müssen wir zunächst die Spannung im Punkt A ausrechnen. Es ist

$$U_{A0} = \sqrt{U_0^2 - J_0^2 R_1^2} = U_0 \sqrt{1 - \Psi^2(\omega \tau_1')}. \tag{21}$$

Dann gilt für Teil 2 der Schaltung

$$J_{20} = \frac{U_{A0}}{|\Re_2|} = \frac{U_{A0}}{R_2} \frac{\omega \tau_2'}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2'^2}} = \frac{U_{A0}}{R_2} \Phi'(\omega \tau_2'). \tag{22}$$

Damit wird

$$J_{20} = \frac{U_0}{R_2} \sqrt{1 - \Psi^2(\omega \tau_2'/\delta)}\, \Phi'(\omega \tau_2') = \frac{U_0}{R_2} X(\omega \tau_2'; \delta). \tag{23}$$

Die Funktion $X(\omega \tau_2'; \delta)$ wird in Abb. 5 in ihrem Verlauf skizziert; es ist eine Glockenkurve, bei der also schon durch die Eigenschaften des Gefäßsystems allein ein Abfall nach hohen Frequenzen zu erzwungen wird. Für Differentialmanometer in einer Aufstellung mit ähnlicher Wirkung vergleiche W. Schmidt [*56*].

Diese Betrachtungen haben uns gezeigt, daß es nicht möglich ist, die Variographen in solche „für p" oder solche „für dp/dt" zu klassifizieren (E. Kleinschmidt [*37*, *38*]), sondern man muß die Konstanten der Gleichungen (17) und (18) angeben, wenn man sein Instrument genügend beschreiben will. Besser noch gibt man graphisch für die verschiedenen Frequenzen die Druckamplituden an, bei denen jeweils eine Registrieramplitude von 1 mm entsteht. Der Schmidtsche Bereich, bei dem vom Variographen wirklich dp/dt angezeigt wird, existiert zwar bei jedem Variographen, wie wir aus dem Verlauf von Φ' gesehen haben; er spielt aber, wie wir unten zeigen werden, keine Rolle bei den Registrierungen.

Wir hatten oben bemerkt, daß die Kapazität C nach (3) vom Polytropenexponenten n abhängen wird, weshalb τ' nicht ganz konstant ist

und Φ' eine gewisse Modifikation aufweisen kann, die die Frequenz, bei der Φ' praktisch in den Wert 1 einmündet, etwas nach höheren ω verschiebt. Wie man an Abb. 1 sieht, bedeutet jedoch auch die maximale, über den ansteigenden Ast von Φ' verteilte Änderung von τ' bzw. β um 40% (bei Luft) nur eine sehr geringfügige Änderung der Φ'-Werte über der Frequenzachse. Für Schmidt-Variographen ist Butan, das technisch in Flaschen bezogen werden kann, sehr vorteilhaft, da hier n nur zwischen 1 und 1,11 variieren kann; man ist außerdem von einem Gasnetz unabhängig.

Trotzdem wir in der Einleitung erwähnt hatten, daß richtig periodische Stücke in den Variogrammen fast nie auftreten, haben wir doch oben die Reaktion eines Variographen auf periodische Druckschwankungen untersucht. Da wir im zeitlichen Ablauf des Luftdruckes einen großen Reichtum an verschiedenen Kurvenelementen zu erwarten haben, können wir auf keinen Fall alle Formen mathematisch erfassen und beschränken uns daher wie üblich auf harmonische Kurvenzüge. Die Registriertechnik hat gezeigt, daß in einem Frequenzgebiet, in dem ein Registrierapparat annähernd frequenzunabhängig anzeigt, auch nichtharmonische Vorgänge getreu wiedergegeben werden, entsprechend der dort geringen Verzerrung der Fourier-Spektren durch den Apparat. Man wird daher auch bei den Variographen ein breiteres Gebiet frequenzunabhängiger Anzeige anstreben. Die Vorschubgeschwindigkeit des Registrierstreifens wird man dabei so anpassen, daß die höchsten Frequenzen gerade noch aufgelöst werden können und lange Perioden nicht zu weit ausgedehnt werden.

II. Die Eichung von Variographen.

Für die Eichung der Variographen werden nicht immer zweckmäßige Verfahren angegeben, z. B. empfiehlt W. Schmidt [*60*] einen Vergleich des Integrals der Variographenkurve mit der innerhalb des Integrationsintervalls am Barometer beobachteten Druckänderung, eine Methode, die sogar zu falschen Resultaten führen kann. An Hand der Gleichungen (15) und (16) sind jedoch geeignete Verfahren leicht zu entwickeln.

Handelt es sich um einen Differentialmanometervariographen, so ist nach Gleichung (15) die Größe a/d zu bestimmen. Diese ist aber, wie man an Hand der Bedeutung von a und d sofort sieht, nichts anderes als der bei einer konstanten Druckdifferenz bestehende Ausschlag auf dem Registrierstreifen. Man bläst also etwas Luft ins Gefäß, so daß ein Überdruck entsteht, der durch Ausgleich durch R hindurch absinkt. Bei bekanntem Anfangsdruck und bekannter Halbwertszeit, die man mit Wassermanometer und Stoppuhr messen kann, läßt sich der Druck nach den Gleichungen (8) und (9) zu jedem Zeitpunkt bestimmen, am bequemsten graphisch in einem linearlogarithmischen Netz. Durch Ablesen der Ausschläge auf dem Registrierstreifen zu bestimmten Zeiten erhält man dann zusammengehörige Wertpaare des Überdruckes δp und der Ausschläge x, deren Quotienten $x/\delta p$ gleich sind und gleich a/d. Bei sehr empfindlichen Systemen muß man möglicherweise den Druck

im Gefäß von am Wassermanometer sicher ablesbaren Werten erst genügend abfallen lassen, bevor man das anfänglich mit möglichst geringer Gefäßkapazität vom Hauptgefäß abgesperrte Druckmeßsystem dem Druck aussetzt.

Für Strommesservariographen bekommt man nach demselben Verfahren gleichzeitige Werte des Überdruckes und der Registrierausschläge. Hier sind entsprechend (16) die Quotienten $x/\delta p = 1/R\,\mathrm{d}$. In beiden Fällen ist das Verfahren nur an einem Tag mit relativ geringen Schwankungen des Luftdruckes anwendbar, die sonst zu sehr störend wirken.

Diese Verfahren versagen, wenn die Zeitkonstante τ' für den Druckausgleich die gleiche Größenordnung wie die Zeitkonstante τ'' für das Registriersystem hat; dann tritt ein merkliches Nachhinken des Ausschlages auf und man bekommt eine falsche Eichung. Ist τ' wenigstens dreimal größer als τ'', so ist keine große Fälschung mehr zu erwarten. Wünscht man jedoch eine Variographeneinstellung, bei der etwa $\tau' = \tau''$ ist, so muß für die Eichung τ' durch Änderung von R entsprechend vergrößert werden. Für den Eichwert des Differentialmanometers ist das nach (15) ohne Einfluß, da bei der Eichung ja R ohne Bedeutung ist. Für die Strommesservariographen ist, da R in (16) im Nenner auftritt, der Eichwert um das Verhältnis der Zeitkonstanten τ_e' bei der Eichung zur Konstanten τ' bei der gewünschten Einstellung für den Betrieb zu vergrößern.

Ist die Zeitkonstante τ' so klein, daß sie durch die Beobachtung des Druckabfalls mit einem Wassermanometer nicht mehr gemessen werden kann, so sind die obigen Eichverfahren nicht mehr verwendbar. Man ist dann genötigt, die Eichkurve Punkt für Punkt bei genügend vielen Frequenzen durch Verwendung einer Pumpe mit entsprechendem Antrieb aufzunehmen. Man schließt diese Pumpe an das Gefäß an und hat jetzt eine mit der Frequenz ω variable Kapazität in Gleichung (4). Unter der Voraussetzung, daß die Variation der Kapazität klein ist gegen die mittlere Kapazität, d. h. $\zeta = \delta C/C < 1$, bekommt man einfach wieder Gleichung (6), worin p_{ao} durch $\zeta\,\overline{p_a}$ zu ersetzen ist. Da man für die Aussteuerung eines Variographen nur kleine Bruchteile ζ des Atmosphärendruckes braucht, ist unsere Vernachlässigung gerechtfertigt. Zur Bestimmung von ζ muß man das Hubvolumen der Pumpe und das Volumen des Gefäßes kennen, da alle anderen Größen in C ja konstant sind und im Quotienten ζ herausfallen.

III. Übersicht über die Luftdruckschwankungen.

Die nun naheliegende Frage, welche Empfindlichkeit man einem Variographen geben muß, damit man in einem vorgegebenen Frequenzgebiet überhaupt registrieren kann, soll mit einer Übersicht über die bisher beobachteten Druckschwankungen beantwortet werden. Man sieht sofort, daß man dabei dem enormen Umfang der möglichen Frequenzen nur durch einen logarithmischen Maßstab gerecht werden kann, wie wir ihn schon zur Darstellung der Kennfunktionen verwendet haben. Ebenso

werden sich aber auch die Amplituden über mehrere Zehnerpotenzen verteilen, so daß wir auch hier einen logarithmischen Maßstab brauchen werden. Zeichnen wir daher ein doppeltlogarithmisches Netz mit den Frequenzen als Abszissen und den Amplituden als Ordinaten, so entspricht einem Schwankungsvorgang, etwa dem halbtägigen Gang des Barometers am Beobachtungsort oder einem hörbaren Ton, ein Punkt in diesem Netz als Bildpunkt des Vorganges. Der doppeltlogarithmische Maßstab gibt uns dabei eine sehr wichtige Freiheit: wir können auch nichtperiodische Vorgänge, bei denen besonders die Angabe einer „Frequenz" auf Schwierigkeiten stößt, zur Darstellung bringen, da wir ja auf Genauigkeit der Zahlenwerte keine große Rücksicht zu nehmen brauchen. Wir ersetzen dabei die fehlende Frequenz des nichtperiodischen Vorgangs durch den Reziprokwert seiner doppelten Ablaufdauer, d. h. wir lösen ein beobachtetes Variogramm auf in einzelne aneinander und aufeinander gesetzte Kurvenelemente von der ungefähren Form einer

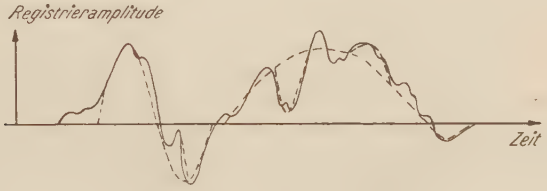


Abb. 6. Schema der Kurvenauswertung.

halben Sinuskurve und bestimmen an ihnen eine Amplitude und eine „Ablaufdauer", wie das in Abb. 6 angedeutet ist. Es ist dies zunächst die einzige Möglichkeit, wie man die unregelmäßigen Variogramme zahlenmäßig fassen kann. Man wird dann am meisten geneigt sein, die dem Vorgang zuzuordnende Frequenz aus der doppelten Ablaufdauer zu bestimmen, wie auch im Fourierspektrum der halben Sinuswelle als stoßartigem Vorgang die Frequenz der ganzen Welle eine zentrale Rolle spielt, allerdings nicht in dem Sinne, daß dort das Spektrum seine größte Amplitude hat. Wenn wir also den Bildpunkt des Vorganges bei der gefundenen Amplitude und der zugeordneten Frequenz einzeichnen, so müssen wir uns daran erinnern, daß zumindest die „Frequenz" mit einer Unsicherheit von der Größe eines Faktors 2 behaftet ist. Jedoch wird ein echtperiodischer Vorgang durch dieses Verfahren richtig eingetragen mit dem einzigen Unterschied, daß zwei aufeinanderfallende Bildpunkte für eine einzige Periode des Vorganges eingezeichnet werden. Eine Häufung von Punkten an einer Stelle deutet also auf eine längerlebige Schwingung hin, so daß das Verfahren auch zu einer ersten Orientierung über vorhandene bevorzugte Perioden bzw. Ablauflängen dienen kann. Zur Illustrierung der Schwierigkeiten, denen man bei der Auswertung von Variographenkurven begegnet, sei in Abb. 7 eine Reihe von typischen Kurven (des Davoser Variographen II, vgl. unten) wiedergegeben, die von Frl. L. Henneberger am Davoser Observatorium zusammen-

gestellt worden ist unter Angabe der allgemeinen Wetterlage, zu der der Kurventypus gehört. Diese Zuordnung der Kurventypen hat sich bei einer Reihe von Wetteranalysen gut bewährt.

Betrachten wir nun das in Abb. 8 gegebene Spektrum der Druckschwankungen, soweit sie bisher bekannt sind, so finden wir zunächst das Gebiet der Akustik, d. h. der hörbaren Druckschwankungen oberhalb einer Grenzfrequenz von rund 20 Hz. Dieses Gebiet ist dargestellt in Form der sogenannten Hörfläche, die nach unten durch die Empfindungsschwelle unseres Ohres, nach oben durch die sogenannte Schmerzschwelle abgegrenzt ist, nach Messungen von H. Fletscher und W. A. Munson [*16*]. Die in der Hörfläche eingezeichneten Kurven sind Kurven gleicher Lautstärke in Phon nach den gleichen Messungen. Die Messungen verschiedener Beobachter decken sich nicht ganz, da wir aber auf zahlenmäßige Genauigkeit innerhalb eines Faktors 2 kein Gewicht legen, können die Unterschiede außer Betracht bleiben. Das bei hohen Frequenzen an die Hörfläche anschließende Gebiet des Ultraschalles hat für uns hier keine Bedeutung.

Als zum Teil seit langem erforscht und bekannt finden Tages- und Jahresgang des Luftdruckes mit ihren harmonischen Oberfrequenzen sowie die lunare Gezeitenwelle der Atmosphäre ihren Platz in unserem Spektrum (Amplituden nach Hann-Süring [*23*], S. 276 und E. Wahl [*73*]); es seien die für die verschiedenen Breiten gültigen Werte durch I-Striche abgegrenzt. In gleicher Weise nehmen wir die von L. Weickmann und seiner Schule [*74*, *42*, *45*, *47*, *48*, *52*, *63*, *64*] analysierten Wellen auf, die in der angegebenen Stärke offenbar nur gelegentlich auftreten, jedoch ist ja auch das Gebiet der Akustik nicht dauernd angeregt. In den polaren Gegenden findet man gelegentlich recht persistente Druckschwingungen von rund 5 Tagen Dauer, die wir nach der Zusammenstellung bei Hann-Süring [*23*], S. 267 ebenfalls in unser Spektrum eintragen.

Bei den vom Wind hervorgebrachten Druckschwankungen, nach denen schon S. P. Langley [*40*] suchte, handelt es sich um Staudruckschwankungen, die durch die am Beobachtungsort durchziehenden Turbulenzkörper verursacht werden. Für die Abgrenzung des Gebietes in unserem Spektrum, in dem wir mit diesen Windeffekten zu rechnen haben, leistet eine Arbeit von A. Schröder [*62*] gute Dienste. Schröder hat mit dem an einer Staudüse auftretenden Druck Anemogramme aufgenommen, bei denen Effekte bis zu weniger als 0,1 sec Dauer aufgelöst werden konnten. Die Staudüse war auf einer Windfahne mit etwa 1 sec Einstelldauer montiert, so daß es vielleicht nicht ganz sicher ist, daß auch für die raschesten Windschwankungen die Düsenrichtung und die Windrichtung einen genügend kleinen Winkel eingeschlossen haben, in dem die Düse den richtigen Staudruck angibt; die Amplituden sehr rascher Vorgänge wurden daher möglicherweise etwas zu klein gemessen. Da wir aber eher geneigt sein werden, eine raumfeste Fläche und nicht eine dauernd senkrecht zum Wind liegende Fläche als Bezugsfläche für unsere ganzen Betrachtungen anzusehen, werden wir von den Schröderschen Messungen

nicht mehr als die Größenordnungen entnehmen. Schröder wertet seine Anemogramme nach dem Schema der Abb. 6 aus und gibt in Blockdiagrammen die Verteilungen der Ablaufzeiten der einzelnen Windstöße für Geschwindigkeitsänderungen 0 bis 2, 2 bis 4 m/sec usw. als Ampli-

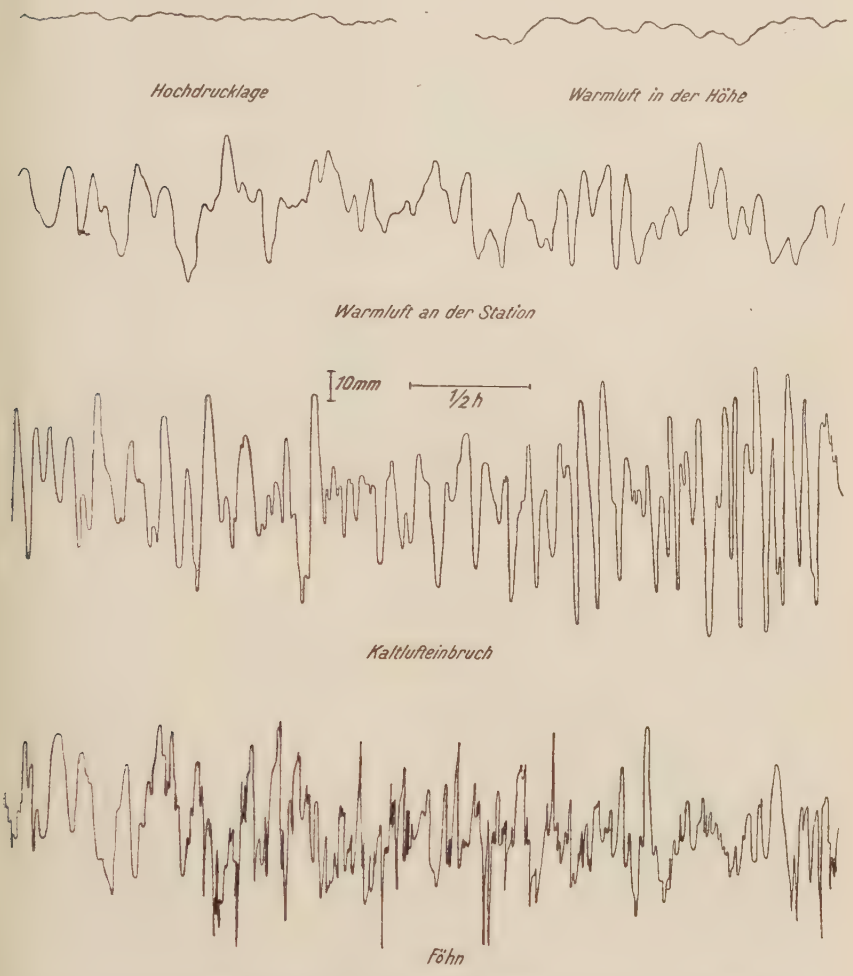
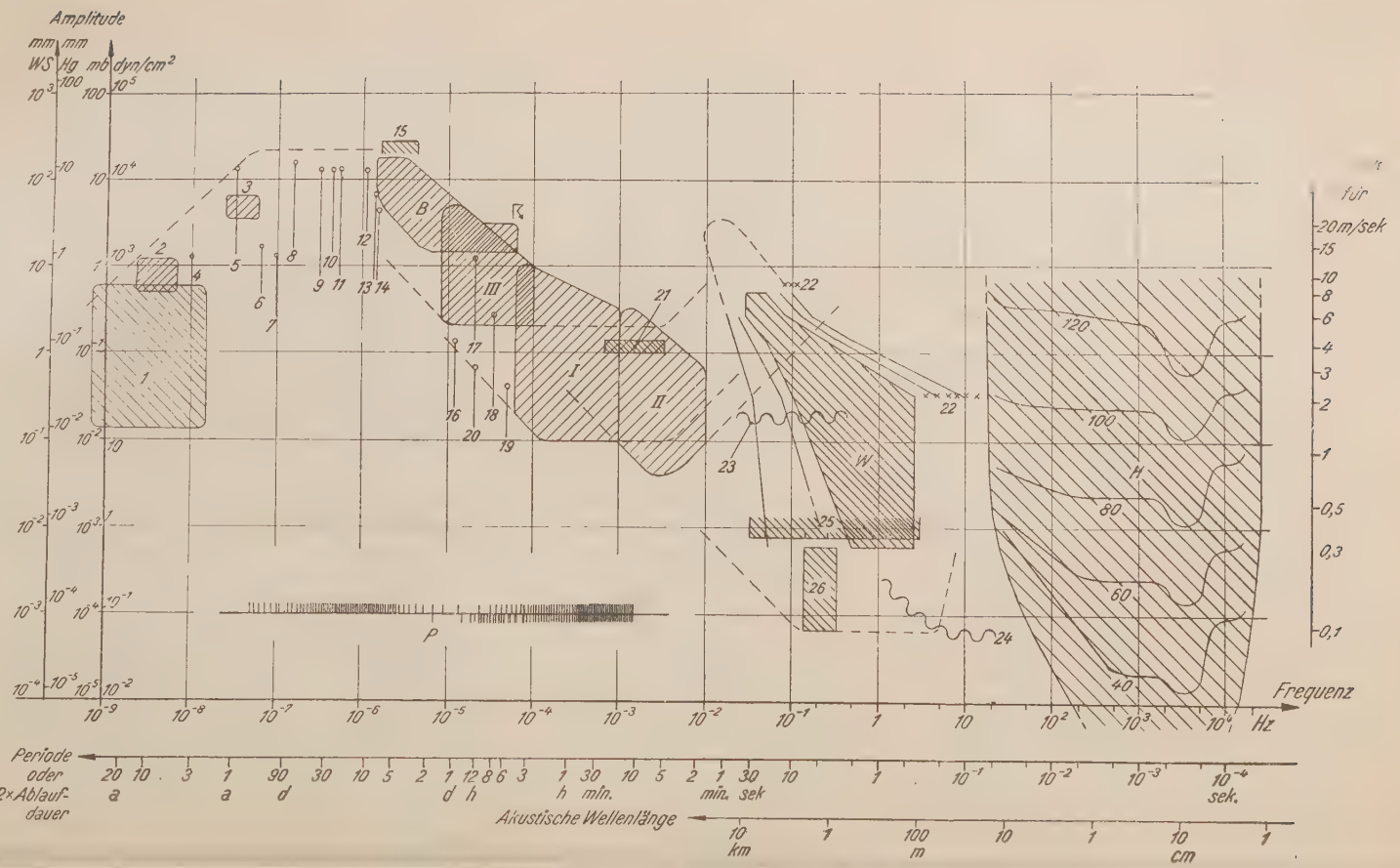


Abb. 7. Einige typische Kurven des Davoser Variographen II (nach L. Henneberger).

tuden der Stöße ohne Rücksicht auf die Grundgeschwindigkeit. Abb. 9 gibt diese Blockdiagramme wieder, zusammen mit einer Übertragung in ein Netz der „Frequenzen" (in unserem obigen Sinne) und der Staudrucke. Die Art der Übertragung nach den Häufigkeiten ist der Abb. 9 ohne weiteres zu entnehmen; es entsteht ein zentrales Band von Bild-


Amplitude
mm WS
mm Hg
mb
dyn/cm²
für
20 m/sek
Frequenz
Hz
Periode oder 2× Ablaufdauer
Akustische Wellenlänge
km
m
cm
sek.
min. sek
h min.
d h
a d
a
B
III
I
II
W
H
P

Legende zu Abb. 8.

1 = Gebiet der von Baur analysierten Perioden
2 = „ „ Schwankungen der Jahresmittel in Davos
3 = „ „ „ Monatsmittel in Davos
4 = 3jährige Luftdruckwelle nach v. Schubert
5 = Jahresgang des Luftdruckes nach Wahl
6 = 1/2jährige Luftdruckwelle nach Reuter und Wahl
7 = 1/3 „ „ „ Wahl
8 = 72tägige „ „ Oehmisch
9 = 36 „ „ „ Letttau
10 = 24 „ „ „ Mildner
11 = 20 „ „ „ Schwerdtfeger
12 = 10 „ „ „ Peau
13 = 8 „ „ „ Mildner
14 = 7,2 „ „ „ Bodin
15 = Wellen in den Polkappen nach Hann-Süring
16 = Tagesgang des Luftdruckes nach Hann-Süring
17 = 1/2tägige Luftdruckwelle nach Hann-Süring
18 = 1/3 „ „ „ „
19 = 1/4tägige Luftdruckwelle nach Hann-Süring
20 = Lunare „ „
21 = Luftdruckwellen nach Köhne
22 = Maximale Druckschwankungen nach Storm van Leeuwen u. Mitarb.
23 = Ungefähre Lage der Empfindlichkeitsgrenze eines Variographen von Storm van Leeuwen u. Mitarb.
24 = Empfindlichkeitsgrenze eines hochfrequenten Variographen von Storm van Leeuwen u. Mitarb.
25 = Gebiet der Beobachtungen von Gutenberg und Benioff
26 = „ „ „ von Saxer
B = Gebiet der Schwankungen nach Barogrammen, in Davos
I = „ „ „ nach Variograph I in Davos
II = „ „ „ „ II in Davos
III = „ „ „ „ III in Davos
W = „ Winddruckeffekte nach Schröder
H = Hörfläche
P = Periodenspektrum der gesamtatmosphärischen Schwingungen nach Abb. 10 (leicht schematisiert)

punkten der häufigsten Windstöße sowie eine Berandung, außerhalb derer keiner der 9000 ausgezählten Windstöße fiel. Da Schröder die niedrigste Amplitudenklasse mit 0 m/sec anfangen läßt, scheint in unserem logarithmischen Maßstab das Band der Winddruckeffekte nach unten nicht geschlossen; es ist den Angaben Schröders jedoch zu entnehmen, daß die kleinsten gemessenen Amplituden etwa 0,3 m/sec betragen haben, weshalb wir das Band hier abschließen, ohne damit sagen zu wollen, daß ein physikalisch bedingter Abschluß vorliegt. Auch nach hohen Frequenzen zu ist der Abschluß wohl zum Teil nur meßmethodisch bedingt. Dabei ist noch zu beachten, daß Schröders Staudüse sich ziemlich hoch über dem Erdboden befunden hat, so daß möglicherweise amplitudenschwächere, aber höherfrequente Effekte kleinerer Turbulenzkörper weniger aufgetreten sind; es sollen ja von anderer Seite Turbulenzkörper vom Durchmesser 1 cm beobachtet worden sein [*15*]. Messungen im Gebiet oberhalb 1 Hz und bei rund 0,1 Hz von Storm v. Leeuwen und Mitarbeitern [*67*] ergaben jedoch maximale Druckeffekte, die auf der Schröderschen Grenzkurve liegen. Betrachten wir die Eintragung des Windbandes in Abb. 8, so werden wir sagen müssen, daß das Windband, soweit es sich nach höheren Frequenzen zu fortsetzt, mit seinen Amplituden nicht hoch in das akustische Gebiet hineinreichen wird, da die Geräusche des Windes (Blätterrauschen, Brausen) nicht so sehr laut sind. Schließlich würden hier noch das vom Wind angeregte, sehr hochfrequente Sausen der Nadelbäume und das Summen der

Telegraphendrähte hergehören, alle diese Erscheinungen sind aber zwar Äußerungen der Atmosphäre, jedoch kaum mehr Meteorologie.

Bei der Übertragung nach Abb. 8 haben wir das Windband nach oben zu durch einen ziemlich willkürlichen Bogen geschlossen, wir können jedoch wohl auf jeden Fall erwarten, daß Windstöße mit sehr viel größeren Amplituden (Geschwindigkeitsänderungen) als etwa 20 m/sec kaum vorkommen werden. Wir können nun fragen, wie es mit der Anregung dieses Windbandes stehen wird, d. h. ob für gewisse mittlere Windgeschwindigkeiten auch gewisse Grenzlinien in diesem Band bestehen

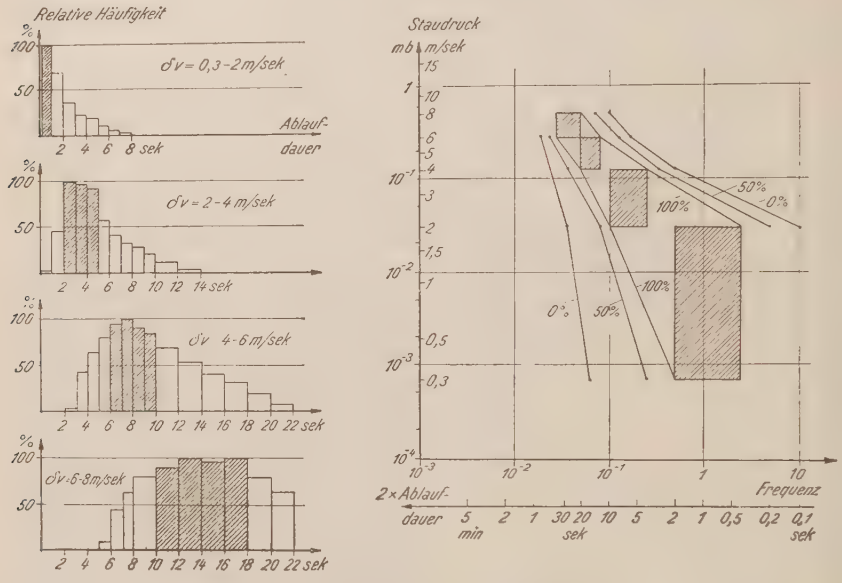


Abb. 9. Windstruktur (nach A. SCHRÖDER).

werden. Nach Aussage von STORM VAN LEEUWEN und Mitarbeitern [66] sowie unseren Erfahrungen in Davos ist etwas Ähnliches der Fall. Bei beiden Beobachtungen waren Variographen benützt, deren Empfindlichkeitsgebiet nur die oberen Teile des Windbandes umfaßte, bei STORM VAN LEEUWEN etwa oberhalb der angegebenen Linie; bei geringen Windgeschwindigkeiten war bei beiden Variographen keinerlei Effekt zu beobachten, erst bei größeren mittleren Geschwindigkeiten traten Stöße auf. Die vielerlei bisher entwickelten Böigkeitsmasse, die G. LOESER [43] zusammengestellt hat, sind zur Beantwortung der Frage nach der Anregung des Windbandes noch zu grob; sie würde sich durch Wiederholung der Schröderschen Messungen finden lassen unter Beachtung der Grundgeschwindigkeit, auf die sich der Windstoß aufbaut.

Das Frequenzgebiet zwischen dem oben besprochenen Windband und dem Gebiet der Weickmannschen Wellen — wir charakterisieren es an-

schaulicher durch seine Perioden zwischen etwa 1 min und einigen Tagen Dauer — findet man nun erfüllt von einem Band von Bildpunkten, wenn man Barogramme und Variogramme nach dem Schema der Abb. 6 ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Druckänderungen auswertet. Die eingezeichneten Gebiete von Bildpunkten sind so aus den Registrierungen eines gewöhnlichen Aneroidbarographen mit Wochenumlauf und dreier auf verschiedene Kennfunktionen (siehe oben) eingestellter, sonst gleichgebauter SCHMIDT-Variographen des Observatoriums Davos gewonnen. Die Kennfunktionen dieser Variographen sind dabei in Abb. 8 so eingetragen, daß die Bildpunkte aller der (periodischen) Druckschwankungen, die eine Registrieramplitude von 1 mm ergeben würden, durch eine Linie verbunden sind; eine r-mal größere Druckschwankung gibt daher eine Registrieramplitude von r Millimeter bei der zugehörigen Frequenz. Diese Empfindlichkeitskurven geben ein gutes Beispiel für die Anpassungsfähigkeit eines Variographen an das gewünschte Frequenzgebiet. Der Übergang von der Einstellung des Variographen II zu der des Variographen I oder III wird erreicht durch Vergrößerung des Strömungswiderstandes, Vergrößerung des Vorratsvolumens und eine geringe Vergrößerung des Hebelübertragungsfaktors von der Bimetallamelle zur Schreibfeder. Für Variograph III ist außerdem Butan verwendet, das eine etwa zweimal größere Empfindlichkeit gibt. Nachstehend sind die Konstanten der Variographen gegeben:

	Absolute Empfindlichkeit (mb/mm) ($\Phi = 1$)	Zeitkonstante (sec)		Volumen des Vorratsgefäßes (l)	Relative Empfindlichkeit des Anzeigesystems
		τ'	τ''		
Variograph I	$9{,}3 \cdot 10^{-3}$	1440	35	800	1,7
Variograph II	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$	70	35	200	1
Variograph III	$150 \cdot 10^{-3}$	16000	35	400	$2 \times 1{,}7$

Besonders bei den Variographen I und III hat sich eine Rüttelvorrichtung sehr bewährt, bestehend aus einem an geeignetster Stelle am Hebelsystem der Schreibfeder befestigten Weicheisenzylinder, der in eine mit Wechselstrom von 50 Hz beschickte Spule (Klingelspule) soweit eintaucht, daß maximale Anziehung besteht. Die entstehende Vibration hilft Reibungen soweit überwinden, daß die Kurven alle Details enthalten, führt aber bei richtiger Wahl der Wechselspannung (Klingeltransformator) noch nicht zu einer Strichverbreiterung.

Bei den Barogrammen sind nur Schwankungen bis zu 4 Tagen einfacher Dauer eingetragen; längere Schwankungen sind durch den Maßstab schon meist so gedehnt, daß man sie nach dieser „individuellen" Auswertmethode (vgl. WEICKMANN [*73*]) kaum mehr finden kann. Weiter sind Zacken und Wellen von weniger als 1 mm Hg Amplitude nicht mit aufgenommen, weil sie zu leicht durch Reibung im Barographen entstellt sind. Die „Gewitternasen" sind dagegen in einem eigenen Feld zusammengefaßt. Die Kurven der Variographen III und I zeigen ähnliche Elemente, wie sie von C. A. PFEIFFER [*49*] beschrieben worden sind.

In das Bildpunktfeld der mit Variograph II in Davos registrierten Schwankungseffekte fallen einmal die Beobachtungen von K. KÖHNE [*39*] bei Göttingen, dann aber auch die von W. SCHMIDT [*60*] in den Tabellen 2 und 6 angegebenen Wellen, auch bei Föhn. Dagegen besteht die von SCHMIDT in der gleichen Arbeit (S. 934) aufgestellte Behauptung, daß bei Föhn Druckschwankungen bis zu 4 mm Hg auftreten, nicht zu Recht. SCHMIDT hat aus dem Verlöschen der Flamme seines Variographen indirekt auf solche Druckschwankungen geschlossen, wozu er die letzten noch registrierten Periodenlängen als Ausgangspunkt nahm. Beachtet man, daß der Anteil Φ' der Kennfunktion (s. oben) für Variograph II bei etwa 5 min Periodenlänge frequenzunabhängig wird, so daß die Empfindlichkeitskurve für die Flamme allein in Abb. 8 etwa vom Minimum der eingezeichneten Kennfunktion aus horizontal in das Band der Windeffekte hinein zu zeichnen wäre, so erkennt man, daß Windstöße von relativ kleiner Amplitude genügen, um die kritische Schwankung des Gasstromes zu erzeugen, bei der die Flamme erlischt. SCHMIDTS spärlichen Angaben nach war die thermische Trägheit seines Bimetallsystems ähnlich wie die unserer Variographen, so daß auch bei ihm Windstöße mit Amplituden von etwa 3 bis 4 m/sec nur Registrieramplituden von rund 1 mm lieferten, die im Variogramm unbeachtet bleiben, während sie durchaus genügen, um die Flamme auszulöschen. Wir konnten durch Beobachtung des Variographen während böigen Föhns sehr oft diesen Sachverhalt bestätigt finden. Ohne Verwendung einer mit konstanter Gaszufuhr brennenden kleinen Zündflamme wären Registrierungen mit Variograph II bei starkem Wind überhaupt kaum zu erhalten. Bei den von STORM VAN LEEUWEN und Mitarbeitern [*67*] ebenfalls bei etwa 5 min Periode angegebenen Amplituden von 1.2 mm Hg handelt es sich dagegen offensichtlich um eine falsche Zehnerpotenz; die angegebene Amplitude muß 0,12 mm Hg gewesen sein, in Übereinstimmung mit den Angaben über die Empfindlichkeit des benützten Variographen, die H. ISRAEL in der gleichen Veröffentlichung macht. Eine Druckschwankung von 1,2 mm Hg hätte den Registrierstreifen bei weitem überschritten.

Das Zusammenfallen der von verschiedenen Beobachtern festgestellten Schwankungseffekte mit unseren Beobachtungen in Davos widerlegt den möglichen Einwand, daß unsere Registrierungen nur örtliche Gültigkeit hätten. Längerdauernde parallele Registrierungen in Basel[1] mit einem gleichen Variographen wie Variograph II in Davos haben zudem gezeigt, daß nicht einmal die in Abb. 7 wiedergegebene Auswahl von Kurventypen dieser Variographenart nur örtlich bedingt ist, wie man nach der Lage von Davos in seinem Hochtal vielleicht vermuten könnte. Die Basler Registrierungen haben bei analogen Wetterlagen das gleiche charakteristische Aussehen, wie wiederum Frl. L. HENNEBERGER festgestellt hat.

[1] Wir benützen die Gelegenheit, Herrn Prof. Dr. TH. KOLLER, Direktor des Frauenspitals der Universität Basel, auch an dieser Stelle unseren verbindlichen Dank auszusprechen für das Gastrecht, das er unserem Schmidt-Variographen in seiner Klinik geboten hat.

Derartige Vergleiche der beobachteten Schwankungen mit der allgemeinen Wetterlage zeigen, daß in dem hier erfaßten Frequenzgebiet die Amplituden um so größer sind, je stärkere Energieumsetzungen in der Atmosphäre vor sich gehen. Inmitten eines stabilen Hochdruckgebietes entsprechen am Barographen wie an den Variographen die Registrierungen nur ganz geringen Druckschwankungen, während etwa beim Durchzug einer Kaltfront der „Störpegel" des Atmosphärendruckes überall um eine bis anderthalb Zehnerpotenzen ansteigt. Zweifellos liegt gerade Davos nicht günstig, um die maximalen Lagen festzustellen, die dieser Störpegel überhaupt annimmt: wollte man etwa die Druckeffekte tropischer Zyklonen in Abb. 9 eintragen, so würden sie beträchtlich über dem bei uns beobachteten Maximalpegel liegen. Der in Davos beobachtete momentane Pegel[1] ist durch eine größenordnungsmäßig geltende Beziehung

$$\text{Amplitude} \times \text{Frequenz} = \text{const.} \qquad (24)$$

gekennzeichnet, wobei die Konstante von der Größe der atmosphärischen Energieumsetzungen abhängig ist. Diese Beziehung ist zunächst nur eine Regel, kein Gesetz, doch hat eine Regel, die in einem Bereich von 3 bis 4 Zehnerpotenzen gilt, beträchtliches Gewicht. Es wäre, besonders auch für die unten zu betrachtenden Vergleiche mit der geophysikalischen Theorie der Luftdruckschwankungen, von großem Interesse zu erfahren, wie die Lagen des Störpegels in anderen Klimaten und anderen Breiten sind und welche Regeln sich für sie aufstellen lassen. Es ist eines der Ziele der vorliegenden Arbeit, zu derartigen Registrierungen anzuregen, für die neben Barographen die billigen und leicht zu bauenden Schmidt-Variographen vollständig ausreichen.

Die Beziehung (24) ist für die Gewinnung von Variographenregistrierungen bedeutungsvoll, da für die langperiodischen Schwankungen der Kennfunktionsteil Φ', der fast allen Variographen gemeinsam ist (s. oben), für Druckeffekte, die der Beziehung (24) entsprechen, gleiche Registrieramplituden bedingt. Würden nun die Amplituden mit zunehmender Frequenz stärker als nach (24) abfallen, so wären kontinuierliche Registrierungen nicht zu erhalten, da bei Einstellung des Variographen auf die im gewünschten Frequenzgebiet nötige Empfindlichkeit die langsameren Schwankungen immer wieder ein Herauslaufen der Schreibfeder aus der Registrierskala verursachen würden. Ein schwächeres Abfallen der Amplituden als nach (24) würde dagegen das völlige Herausschneiden eines gewissen Frequenzgebietes mit einem Variographen ermöglichen. Bei Gültigkeit von (24) kommen dagegen nur gelegentlich, z. B. bei Gewittern, Wanderungen des „Nullpunktes" des Variographen vor, die Korrekturen erfordern, um die Kurve auf dem Registrierstreifen zu halten. Da bei Gültigkeit von (24) alle Schwankungen bis etwa zu der Frequenz der maximalen Empfindlichkeit des Variographen mit gleicher

[1] Als momentaner Pegel wird die Verbindungslinie der Bildpunkte in Abb. 8 für Druckschwankungen aller Frequenzen bezeichnet, die zu einem betrachteten Zeitpunkt im Gange sind.

Registrieramplitude aufgezeichnet werden, beherrschen die kurzperiodigen Druckeffekte das Kurvenbild und die langperiodigen, besonders die im Schmidtschen Bereich (vgl. oben) sind gar nicht ohne weiteres zu erkennen.

Eine ähnliche Verdeckung von Schwankungen mit großer Ablaufdauer durch kurzzeitige Schwankungen besteht im Gebiet der Periodenlängen über etwa 4 Tagen. Es ist kein Zweifel, daß die Beziehung (24) nur bis zu Perioden von etwa 10 Tagen gelten kann, da ein weiteres Ansteigen der Amplituden zu langdauernden merklichen Anreicherungen der Atmosphäre in einzelnen Gebieten der Erde führen müßte, wie man durch Extrapolation leicht sieht. Es ist daher zu erwarten, daß der „Störpegel" bei längerperiodigen Effekten zumindest konstant bleibt, wenn nicht absinkt. Werte für die Schwankungsamplituden sind hier wegen der frequenzunabhängigen Empfindlichkeit von Barographen oder Barometern aber nur durch Eliminierung der kurzzeitigen Schwankungen durch Mittelbildungen zu gewinnen. Beim Versuch, dort über die Angaben bei Hann-Süring [*23*] S. 270 und F. Baur [*2*] hinaus wenigstens Anhaltspunkte über den Verlauf des Pegels zu gewinnen, zeigte sich, daß (für Davos) die Schwankungen von einfachen Monatsmitteln des Luftdruckes von Monat zu Monat noch so groß waren, daß längerdauernde Schwankungen schlecht zu erkennen waren. Erst übergreifende Dreiermittel dieser Monatsmittel lieferten soweit geglättete Kurven, daß nach der „individuellen" Auswertmethode die gesuchten langdauernden Schwankungen hervortraten, deren Bildpunkte aus einer 30jährigen Reihe im Gebiet des Luftdruckjahresganges einzeln eingetragen sind. Etwas Ähnliches wiederholte sich bei den einfachen Jahresmitteln der 70jährigen Davoser Reihe: auch hier zeigten erst die übergreifenden Dreiermittel der Jahresmittel genügend glatte Kurven für eine Auswertung, deren Ergebnis ebenfalls durch einzelne Bildpunkte bei etwa 10 bis 20 Jahren doppelter Ablaufdauer eingetragen sind. Für noch länger dauernde Schwankungseffekte ist eine 70jährige Reihe schon zu kurz, es mag jedoch noch vermerkt werden, daß die einfachen 20-Jahresmittel innerhalb 0,1 mm Hg übereinstimmen. Diese Befunde zeigen zur Genüge das von vorneherein angenommene Ergebnis, daß der Pegel von den Schwingungen von vielleicht 100 Tagen Periodenlänge ab wieder fällt, was durch die gestrichelte Linie nur angedeutet werden soll. Man kommt hier in das Gebiet der Klimaschwankungen. Für Davos hat für das ganze Jahr das Barogramm in einem Bereich von etwa 25 mm Platz, die Schwankungen werden sich also auch im Gebiete zwischen 10 und 100 Tagen in diesen Grenzen halten. Wenn hier in anderen Klimaten Schwankungen vorkommen, die um einen Faktor 2 bis 3 größer sind, so mag noch einmal daran erinnert werden, daß die meisten Angaben, besonders die der „Frequenzen", in Abb. 8 nur bis auf einen Faktor 2 sicher sind.

Bei sehr geringen mittleren Windstärken nimmt die Böigkeit stark ab, die Windströmungen werden laminar, so daß das oben besprochene Windband dann gar nicht angeregt sein wird. So konnten Storm van Leeuwen und seine Mitarbeiter [*67*] mit einem Variographen, dessen

größte Empfindlichkeitskurve (für 1 mm Registrierausschlag) in Abb. 8 zwischen 1 und 20 Hz eingezeichnet ist, im windschwachen Vorföhnstadium in Innsbruck keine Effekte von mehr als etwa 10^{-4} mm Hg feststellen.[1] Ist also bei Windstille das Windband „stumm", so besteht die Möglichkeit nach Druckeffekten sehr kleiner Amplituden zwischen 10^{-2} und 10 Hz zu suchen. Variographen für dieses Gebiet sind von B. Gutenberg und H. Benioff [*5*, *20*, *21*, *22*] sowie von L. Saxer [*54*] gebaut worden. Sie haben übereinstimmend, aber unabhängig voneinander gut periodische Druckwellen in dem Gebiet bei einigen Sekunden Perioden-dauer gezeigt. Gutenberg und Benioff [*21*] geben als bevorzugte Perioden 4, 7 und 20 sec an. Die Empfindlichkeit des Benioff-Variographen ist dabei etwa eine Größenordnung geringer als die des Saxerschen Kapazitäts-Variographen. Nach Saxer zeigen die Registrierungen zum Teil schwebungsartigen Verlauf. Ein direkter Zusammenhang mit der mikroseismischen Bodenbewegung wird von den Beobachtern abgelehnt, jedoch deuten Beobachtungen von Gutenberg [*22*] auf eine gemeinsame Ursache hin. Die Amplituden- und Frequenzangaben bei Gutenberg und Benioff sind zu spärlich, um über einen Zusammenhang der Erscheinungen in ihrem Gebiet mit dem Band der langperiodischen Druckeffekte zu entscheiden. Die Registrierungen mit dem Saxerschen Variographen in Freiburg (Schweiz) lassen keine Wellen mit größeren Perioden als 10 sec erkennen;[2] dagegen sind langperiodige Schwankungen, die entsprechend der eingezeichneten Kennfunktion mitregistriert werden müssen, zu sehen.

IV. Die Bedeutung der atmosphärischen Druckschwankungen.

In Abb. 8 werden sich die Bildpunkte physikalisch verschiedenartiger Vorgänge an getrennten Stellen häufen. So geben die Turbulenzeffekte des Windes, deren Wirkungen als Staudruckänderungen am Beobachtungsort sehr anschaulich sind, Anlaß zu den Punkten des geschlossenen Windbandes. Die zwischen den Effekten im Saxer-Gutenberg-Gebiet und dem Band der langsamer verlaufenden Druckschwankungen vermutlich bestehende Lücke läßt darauf schließen, daß die Erscheinungen in jenem Gebiet einen anderen physikalischen Charakter haben. Betrachtet man die in Abb. 8 eingetragene Skala der akustischen Wellenlängen, so sieht man, daß die den Saxer-Gutenbergschen Wellen entsprechenden Wellenlängen etwa die maximale Länge haben, die in der Atmosphäre noch zur Ausbildung eines Schallfeldes führen kann. Bei längeren Wellen macht sich die Tatsache, daß die Atmosphäre eine an Dichte abnehmende Haut um eine rotierende Kugel bildet, stärker

[1] Möglicherweise sind auch hier Irrungen um eine Zehnerpotenz geschehen, so daß die beobachteten Amplituden in den Abb. 21 bis 25 in [*67*] zu groß sind. Es besteht jedenfalls keine Übereinstimmung zwischen diesen Abbildungen und den Angaben auf S. 419 l. c.

[2] Wir sind Herrn Prof. F. Dessauer für die Übersendung dieser Kurven sehr zu Dank verpflichtet.

bemerkbar und die Grenzbedingungen spielen eine zunehmende Rolle.[1] Die Messungen von SAXER sowie GUTENBERG und BENIOFF erfassen daher möglicherweise das langwellige Ende eines Bandes akustischer Aktivität der Atmosphäre, das in seiner allgemeinen Lage unter die Hörfläche fällt und das vielleicht zu den von der Brownschen Bewegung verursachten Druckschwankungen Beziehungen hat. Betrachtet man Abb. 8 vom Standpunkte der Lokalisierung des „Luftdruck-Störpegels" aus, so muß es grundsätzlich möglich sein, von beliebig langen Perioden bis zu beliebig hohen Frequenzen lückenlos die Lage dieses Störpegels anzugeben. In irgend einer Weise muß bei allen Frequenzen ein kontinuierlich wirksamer Vorgang vorhanden sein, der gewisse Schwankungen des Luftdruckes bewirkt. Ein solcher Vorgang ist eben die Brownsche Bewegung, die bei jeder Frequenz eine minimale Höhe des Störspiegels zumindest am Meßapparat zur Folge hat. Da diese Höhe nicht ohne Kenntnis gewisser Apparatkonstanten angegeben werden kann (vgl. etwa die Berechnung der Empfindlichkeitsgrenzen elektrischer Meßgeräte), so läßt sie sich nicht allgemein in Abb. 8 eintragen. Unterhalb des Störpegels liegende Druckschwankungen sind dann nicht mehr nachweisbar, da sie in den Schwankungen des Störpegels untergehen; sie sind aber aus dem gleichen Grunde ohne jedes Interesse.

Über diesen minimalen Störpegel werden nun die Bänder von Bildpunkten solcher Vorgänge überlagert sein, die speziellen Eigenschaften der Atmosphäre ihr Dasein verdanken. Im Gebiet hoher Frequenzen, in dem eine Abstrahlung von Energie von einer Schallquelle aus möglich ist (Gebiet der eigentlichen Akustik), sind es gerade nichtatmosphärische Körper verschiedenster Art, z. B. die Brandung, denen die Rolle der Schallquelle zukommt, so daß man die Ausbildung eines geschlossenen, einheitlichen Bandes von natürlichen Luftdruckschwankungen im akustischen Frequenzgebiet nicht erwarten kann. Bei niedrigeren Frequenzen besteht das Windband, zu dem die wechselnden kleinräumigen Bewegungen der Luft Anlaß geben; hier tritt eine Ausbreitung von Energie wie im akustischen Gebiet höchstens noch auf geringe Entfernungen auf, da die Windbewegungszustände sich schon auf Entfernungen vollkommen ändern, die klein gegen die den auftretenden Frequenzen zugehörenden Schallwellenlängen sind. Im Gebiet der niedrigsten hier betrachteten Freqenzen sind es zur Hauptsache die Änderungen in der gesamten über dem Beobachtungsort lagernden Luftmasse, die zur Beobachtung gelangen. Bei den säkularen Perioden endlich könnten nur mehr Änderungen der Gesamtatmosphäre, etwa ihrer Masse, von Bedeutung sein.

[1] Die Anomalien der Ausbreitung kurzwelligen Schalles dürfen hiermit nicht verwechselt werden. Man vergleiche etwa die Ableitung der Formel für die Schallgeschwindigkeit bei G. JOOS [*36*]; die dort gemachten Vernachlässigungen zeigen, daß die übliche Schallgeschwindigkeit nur für kurzwelligen Schall gilt.

Gehen wir zu den längerperiodigen Druckschwankungen über, so drängt sich die Frage nach der physikalischen Natur der Effekte dieses Teiles des Störpegels auf. Schon frühzeitig hat man, ausgehend von der auffallenden halbtägigen Druckwelle, die Möglichkeit von Eigenschwingungen der Atmosphäre in Betracht gezogen (Lord KELVIN). Die Erfahrung hat gelehrt, daß alle Gebilde mit definierten Grenzen zu mechanischen Eigenschwingungen mit gewissen Eigenfrequenzen fähig sind Die Vorstellung, daß auch die nach oben hin nicht definiert begrenzte Atmosphäre solche Eigenschwingungen besitzt, mag demnach zunächst befremden, die nähere Betrachtung in der Theorie der atmosphärischen Schwingungen hat jedoch eindeutig gezeigt, daß das Fehlen einer solchen Grenze die Ausbildung von Schwingungen mit definierten Eigenfrequenzen keineswegs unmöglich macht. Nachdem anfängliche Unsicherheiten über die Behandlung des Problems (F. M. EXNER [*13, 14*], R. BECKER [*3*]) besonders durch B. HAURWITZ [*25*] geklärt worden waren, hat HAURWITZ [*26, 31*] die Theorie der Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre zu einem gewissen Abschluß gebracht. Durch Entwicklung der Lösung der Bjerknes-Solbergschen Störungsgleichungen (für deren historische Entwicklung vgl. HAURWITZ [*26*]) nach Kugelfunktionen hat die Methode zur Gewinnung der Eigenfrequenzen viel an Bequemlichkeit, Eleganz und Allgemeingültigkeit gegenüber den Margulesschen Rechnungen [*44*] gewonnen. Die noch bestehenden Vereinfachungen — Vernachlässigung der vertikalen Beschleunigungen und Voraussetzung des Bestehens von Autobarotropie — dürften kaum gravierend sein; die geringe Abhängigkeit der Frequenzen von der Erdoberflächentemperatur zeigt zudem, daß die Schwingungen nicht sehr von der Verteilung der Oberflächentemperatur auf der Erde abhängen werden. Zwanglos ergeben sich in der Theorie von HAURWITZ drei Gruppen von Schwingungen: erstens zonale Schwingungen mit gleicher Phase in allen Längen: zweitens sogenannte tesserale Schwingungen erster Klasse, die auf der rotierenden Erde mit verschiedenen Geschwindigkeiten ost- oder westwärts wandern und (bis auf eine) Perioden kleiner als ein Sterntag haben; drittens tesserale Schwingungen zweiter Klasse, die nur westwärts wandern und Perioden größer als ein Sterntag haben. Die Entwicklung der Lösung bringt die Einführung eines ganzzahligen Parameters (n) für die erste Schwingungsgruppe und die von zwei solchen Parametern (n; $k \leq n$) für die beiden anderen Schwingungsgruppen mit sich. Abb. 10 gibt eine Übersicht über die Periodenspektra, wobei die höheren Glieder der zonalen und tesseralen Schwingungen der ersten Klasse nach den von HAURWITZ [*31*] angegebenen Näherungsformeln berechnet sind, während die Perioden der niederen Glieder aller Schwingungen der gleichen Arbeit von HAURWITZ entnommen sind. Für die höheren Glieder der Schwingungen zweiter Klasse gibt HAURWITZ [*31*] die Näherungsformel $n\,(n-1)\,2\,k$ für die Periodenlänge in Sterntagen. Es ist dies dieselbe Formel, die H. ERTEL [*12*] in seiner Theorie erhält. Trotzdem HAURWITZ [*32*] mit Recht Einwände gegen ERTELS Methode erhoben hat und die Ertelsche Theorie offensichtlich nicht so viel zu leisten vermag, als die

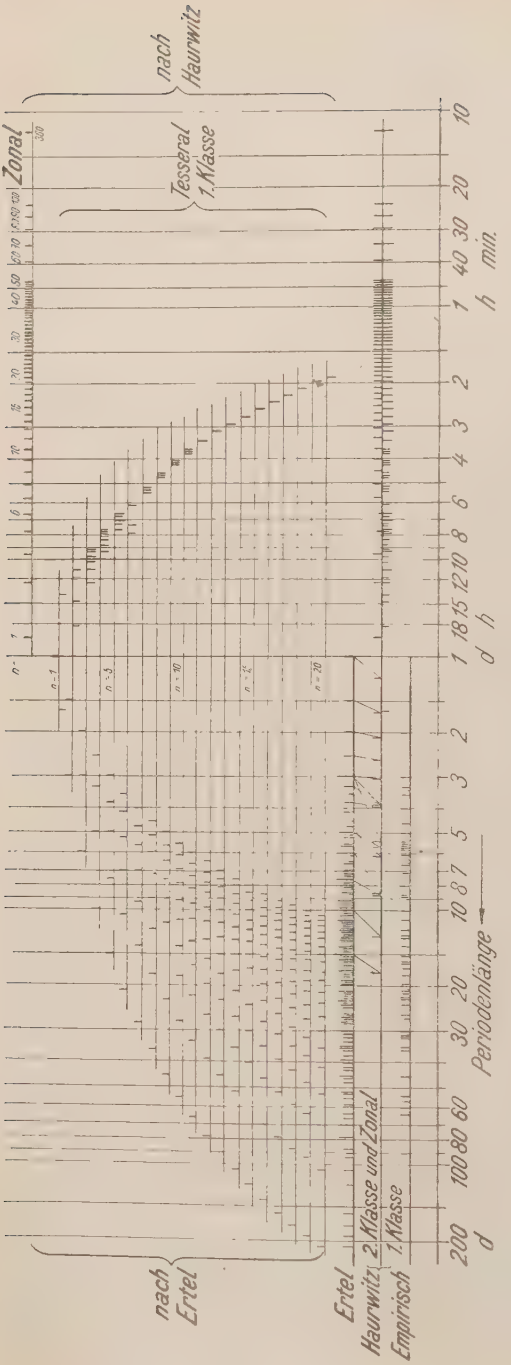


Abb. 10. Spektrum der Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre.

von Haurwitz, sind in Abb. 10 die einzelnen Serien des Periodenspektrums der langperiodigen Schwingungsklasse bis $n = 20$ nach der obigen Formel der Übersichtlichkeit wegen auch für die niedrigen Ordnungen gezeichnet. Die Projektion der einzelnen Linien in das Gesamtspektrum „Ertel" ergibt eine nach längeren Perioden zunehmende Dichte von Linien (Mehrfachlinien sind entsprechend erhöht dargestellt), wobei die Linienzahl bis zu 10 Tagen Periodenlänge vollständig ist. Dieses ganze Spektrum „Ertel" wäre nun auf das darunterliegende Spektrum „Haurwitz" zu projizieren, wobei eine zu größeren Perioden hin abnehmende Linksverschiebung der Linien stattzufinden hätte, wie dies bei den Linien niedriger Ordnung angedeutet ist. Diese Verschiebung betrifft vornehmlich die längerperiodigen Linien der einzelnen Serien des „Ertel"-Spektrums (mit kleinem k).

Betrachtet man die Bedeutung der Kugelfunktionsparameter n und k, so findet man, daß der Schwingungstypus (n, k) eine schachbrettartige Phasenkarte besitzt mit n-k Breitenkreisen und k Meridianen als Knotenlinien; ist k bei $2\,n/3$, so

sind die Gebiete gleicher Phase „sphärische Quadrate", ist $k = o$, so sind sie Zonen, und ist $k = n$, so sind sie sphärische Zweiecke. Die Haurwitzsche Lösung mit den Parametern (n, k) ist jedoch immer eine Summe mehrerer benachbarter Kugelfunktionen, sie hat also eine etwas kompliziertere Phasenkarte. Schwingungen sehr hoher Ordnung, d. h. großen Werten von n und k würden nun eine sehr enge geographische Nachbarschaft von Gebieten entgegengesetzter Phase bedeuten, von denen man zunächst nicht glauben möchte, daß sie bestehen bleiben könnten;[1] denn es scheinen ja exogene Vorgänge vorhanden, die die Ausbildung der Gebiete einheitlicher Phase stören werden — denken wir an die Konvektion, an Wärmegewitter, an Berg- und Talwinde usw., kurz an thermisch ausgelöste Effekte aller Größenordnungen. Der kleinsträumige Effekt, den wir zu betrachten haben, dürfte die Schönwetterkonvektion sein mit Gebieten auf- und absteigender Luftpakete von sicher nicht mehr als 10 km Durchmesser in der Kartenprojektion und „Perioden" des Auf- und Absteigens von sicher mehr als 10 min [*50*]. Die tesserale Schwingung erster Klasse mit $n = 1080$ hat nach Haurwitz eine Periode von 2 min, unabhängig von k; wählen wir $k \approx 2n/3$, so hat das Feld gleicher Phase die Ausdehnung $^1/_2$ zu $^1/_2$ Bogengrad, also in den gemäßigten Breiten noch wenigstens einen Durchmesser von 30 km. Es sind daher im Gebiet gleicher Phase der Schwingung 10 und mehr auf- und absteigende Luftströmungen vorhanden, bei denen die Änderungen der Strömung innerhalb 2 min noch nicht sehr groß sein werden. Damit sind diese Konvektionsströme den momentan für die Schwingung gültigen Grenzbedingungen zuzurechnen, eine Störung dieser Schwingung wird durch sie kaum erfolgen.

Nehmen wir für Wärmegewitter eine Ablaufdauer am Beobachtungsort von 1 h, so gehört die Schwingung mit dieser Periode zum Parameterwert $n = 40$; ihre Felder gleicher Phase haben dann für $k \approx 2n/3$ die Ausdehnung 15 zu 15 Grad, die unvergleichbar größer ist als die des Wärmegewitters, das also auch diese Schwingung nicht stören kann. Hat dagegen das Feld gleicher Phase bei einer Schwingung mit höherem n-Wert die gleiche Ausdehnung wie das Gewitter, so ist ihre Periode so kurz, daß während der Periodenlänge sich der Zustand im Gewittergebiet kaum verändert; damit gehört auch hier die Verteilung der meteorologischen Elemente in diesem Gebiet zu den Grenzbedingungen der Schwingung.

Etwas anders liegen die Verhältnisse im Gebiet der Schwingungen der zweiten Klasse mit mehrtägigen Perioden. Hier hätte die oben diskutierte Schwingung mit $n = 1080$, $k \approx 2n/3$ eine Periode von 810 Tagen. Es kann kein Zweifel sein, daß die konvektiven Störungen aller Art das Bestehen von merklichen Druckdifferenzen auf 1 Grad Distanz nicht 405 Tage lang gestatten. Schwingungen der zweiten Klasse mit

[1] Dabei ist zu beachten, daß zur ganzen Schwingungserscheinung bereits periodische Luftversetzungen (Winde) dazugehören; es werden also nicht etwa durch die Druckgradienten hervorgerufene Winde für Druckausgleich sorgen.

hoher Ordnungszahl werden also nicht bestehen bleiben können. Die größten n-Werte dürften die Schwingungen mit $k \approx 2n/3$ erreichen, deren Gebiete gleicher Phase die größten Linearausdehnungen haben.

Betrachtet man das Gesamtspektrum der möglichen Eigenperioden der Atmosphäre, so zeigt sich eine spärliche Liniendichte zwischen etwa 10 Stunden und 3 Tagen Periodenlänge, während außerhalb dieses Gebietes die Liniendichte so zunimmt, daß man, besonders bei der Übertragung in Abb. 8, den Eindruck eines kontinuierlichen Spektrums bekommt, zumindest in dem hier verwendeten logarithmischen Maßstab; doch würde auch in einem linearen Maßstab, besonders im Gebiet der bisherigen Periodenforschung bei Perioden größer als ein Tag, die Liniendichte sehr groß werden, wenn man Schwingungen beliebig hoher Ordnung zulassen wollte. Nach der Drudeschen Dispersionstheorie würde die Darstellung der Resonanzamplitude bei der Frequenz ν bei einem System mit mehreren Eigenfrequenzen ν_m eine Reihe $\sum_m a/[(\nu_m{}^2 - \nu^2)^2 + A^2 \nu_m{}^2 \nu^2/\pi^2]^{1/2}$ enthalten, worin A das logarithmische Dekrement der Schwingung ist. Betrachtet man zwei benachbarte Eigenfrequenzen für sich allein, so schätzt man leicht ab, daß eine Trennung der „Linien" unmöglich wird, wenn der Unterschied $\delta\nu$ der Eigenfrequenzen kleiner ist als $A\nu$. Nehmen wir $A = 10^{-4}$, d. h. Abklingen einer angestoßenen Schwingung auf den e-ten Teil in 10^4 Perioden, so ist die „Dämpfungsbreite" der Linien der atmosphärischen Eigenschwingungen wohl stets noch klein gegen die Linienabstände; ein Zusammenwachsen der Linien zu einem kontinuierlichen Spektrum wäre dann nicht in Strenge zu erwarten. Dies würde erst bei etwa $A = 10^{-2}$ beginnen, in Gebieten großer Liniendichte vielleicht auch schon früher. Dagegen ist die durch die Ungenauigkeiten der Messungen bedingte Analysenbreite der Schwingungsperioden sehr erheblich.

Die Fragen des Entstehens und Vergehens dieser Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre hängen eng zusammen mit dem noch ungelösten Problem der Dämpfung dieser Schwingungen. Als dämpfende Vorgänge kommen die Reibungseffekte in den untersten Atmosphärenschichten in Frage sowie thermodynamische Kreisprozesse bei nichtadiabatischen Druckänderungen (G. I. TAYLOR [*70*]), die die mechanische Schwingungsenergie in Wärme verwandeln können. Vielleicht ist aber unter Mitwirkung von Strahlungsvorgängen auch eine Entdämpfung durch thermodynamische Prozesse möglich, die gerade zu einer Anregung der Schwingungen führen müßte. Der Versuch, die Reibung in Rechnung zu setzen, ist im Anschluß an MARGULES in einem konkreten Fall von H. LETTAU [*42*] unternommen worden, ohne daß das Resultat befriedigend wäre (vgl. B. HAURWITZ [*31*]); ein allgemeiner Versuch von W. WÜNSCHE [*77*] führt zu so komplizierten Frequenzformeln, daß ihre numerische Auswertung von WÜNSCHE selbst unterlassen worden ist. Da erfahrungsgemäß die Reibungsdämpfung klein ist, dürften im allgemeinen die durch die Dämpfung verursachten Verschiebungen der Eigenfrequenzen gering sein; man vergleiche den eindimensionalen Fall, etwa bei R. COURANT [*9*].

Geringe Dämpfung bedeutet aber auch langsame Abnahme der Amplitude einer einmal angeregten Schwingung; sind nun die von der Weickmannschen Schule diskutierten Wellen [*73*, *42*, *45*, *47*, *48*, *52*, *63*, *64*] Eigenschwingungen der Erdatmosphäre, so müßen sie sehr viel persistenter sein, als offenbar den Beobachtungen entspricht. Die Symmetriepunkte des Luftdruckganges liegen meist im Sommer oder Winter und die Spiegelbildlichkeit bleibt gewöhnlich nicht weit über die Übergangsjahreszeiten hinaus erhalten. Demnach wäre eine 36tägige Welle (H. Lettau [*42*]) auf etwa 5 volle Schwingungen beschränkt, innerhalb deren ihre Amplitude merklich wäre, sagen wir größer als 1 mm Hg. Damit hier überhaupt etwas wie Symmetrie möglich ist, müßte also mindestens diese Schwingung innerhalb $2^1/_2$ Perioden angeregt werden und müßte in weiteren $2^1/_2$ Perioden durch Dämpfung wieder um etwa eine Zehnerpotenz abnehmen, was beides nur bei sehr starker Dämpfung möglich ist. Bei derart starken Dämpfungen — Λ hätte hier die Größenordnung 1 — würden aber die Linien des Eigenschwingungsspektrums nicht mehr unterscheidbar sein und die Betrachtung der empirisch gefundenen Schwingungen als Resonanzschwingungen würde ihren Sinn verlieren. Wollte man dagegen annehmen, daß in den Übergangsjahreszeiten die betrachtete Schwingung durch andere Schwingungen aufgezehrt wird, was wegen der Nichtlinearität des Problems (keine ungestörte Überlagerung der einzelnen Schwingungen) möglich wäre, so dürfte der Übergang der Schwingungsenergie von einer Schwingungsform zur anderen bei den geringen Dämpfungen viele Perioden erfordern, die Übergangsjahreszeiten wären dazu also zu kurz. Gerade wegen der geringen Dämpfungen muß auch ein anregender Vorgang über viele Perioden wirksam sein, wenn eine Schwingung merkliche Amplituden bekommen soll; die Erregungsquelle braucht dabei nicht örtlich ausgedehnt zu sein. Explosionsartige Vorgänge (Vulkanausbrüche, Meteoreinschläge) dagegen werden das ganze Spektrum anregen, jedoch mit sehr geringen Amplituden im Vergleich zur Höhe der Druckschwankung in der Explosionswelle (siehe etwa F. J. W. Whipple [*76*]).

Ein weiterer Punkt, der oben schon gestreift worden ist, muß noch hervorgehoben werden: wenn eine Eigenschwingung von der zweiten Klasse mit genügender Amplitude angeregt ist, so muß sie sich in den Wetterkarten deutlich ausprägen in durch kürzere oder längere Zeit stationären Hoch- und Tiefdruckgebieten. Dieser Druckverteilung kommt aber keinerlei Wetterwirksamkeit zu, da — wie oben schon erwähnt — zu jeder Schwingung ein ihr eigenes System von Luftmassenversetzungen (Winden) gehört. Die Gradienten der Druckverteilung in der Schwingung werden daher nicht zu einer gesonderten Luftbewegung und damit etwa zu einer Zyklogenese beitragen.

Für die meisten Linien des Spektrums der Eigenschwingungen sind noch keine anregenden Vorgänge bekannt. Eine Verknüpfung mit den Singularitäten, die H. Flohn [*17a*] annimmt, begegnet den gleichen Bedenken bezüglich der Persistenz der Schwingungsamplituden, die oben angeführt sind, und führt zunächst zu keinen weiteren Einblicken in den Anregungsvorgang.

Bei den durch die Einstrahlungsfunktion der Sonne erzwungenen Schwingungen, dem Tages- und Jahresgang mit ihren harmonischen Oberfrequenzen, ergibt Abb. 8 nicht viel Neues. Die Abnahme der Amplituden der halb- und dritteljährigen Schwingungen nach F. Reuter [52] und E. Wahl [74] lassen kaum darauf schließen, daß die zehnte Harmonische, die in der Einstrahlungsfunktion vielleicht eben noch merklich vorhanden ist (F. Hopfner [35]), durch Resonanz Amplituden bis zu 10 mm Hg bekommen kann (H. Lettau [42]); auch für die anderen Harmonischen wären genügend Resonanzmöglichkeiten da, wie Abb. 10 zeigt. Interessant für die Theorie des täglichen Luftdruckganges dagegen ist, daß nach dem Spektrum „Haurwitz" in Abb. 10 keine Eigenschwingung bei einer Periode von 24 h liegt, daß aber in nächster Nähe von 12 h die zonale Schwingung mit $n = 2$ und die tesseralen Schwingungen $(n, k) = (2, 2)$-westwärts und $(3, 3)$-ostwärts wandernd liegen. Die Form der erzwungenen Schwingung mit einer Periode von 12 mittleren Sonnenstunden kann also recht kompliziert sein und stehende sowie wandernde Anteile enthalten; vgl. die Zusammenstellung von J. Bartels in Hann-Süring [23] S. 291, wo die Arbeit von Haurwitz [31] nicht erwähnt ist. Die achtstündige Schwingung kann ebenfalls aus mehreren Einzelschwingungen zusammengesetzt sein, während die sechsstündige Schwingung einheitlicher sein sollte (die Lage der tesseralen Schwingungen mit $n = 6$ ist nach einer Näherungsformel berechnet, es scheint nicht unmöglich, daß gerade bei 6 h Periodenlänge keine eng benachbarte Eigenfrequenz liegt).

Die hier dargestellten Verhältnisse legen die Vermutung nahe, daß die Amplituden der atmosphärischen Eigenschwingungen, mit Ausnahme der halbtägigen, stets beträchtlich unter dem für mittlere Breiten gültigen „Störspiegel" der langsam verlaufenden Druckschwankungen liegen; die Druckvorgänge, die hier die Höhe des Störspiegels bestimmen, haben dann eine andere physikalische Natur. Das Band der Bildpunkte dieser Vorgänge könnte daher in ähnlicher Weise die Bildpunkte der atmosphärischen Eigenschwingungen überlagern, wie das Windband das Saxer-Gutenberg-Gebiet überdeckt. Es scheint dabei nicht ausgeschlossen, daß in gewissen Gebieten der Erde, z. B. im Pazifischen Ozean, die Bildpunkte der Gewitter und Zyklonen sich an getrennten aber eng begrenzten Stellen in Abb. 8 häufen und daß zu geeigneten Zeiten die Beobachtung von atmosphärischen Eigenschwingungen unter diesen Punktfeldern möglich wird.

Für die Erfassung der Vorgänge, die den Störpegel in den gemäßigten Breiten liefern und deren wichtigste Vertreter die Zyklonen sind, wird man also andere Vorstellungen heranziehen müssen. Für sie wird der stetige Zusammenhang zwischen langperiodigen und kurzperiodigen Teilerscheinungen, wie er in Abb. 8 zum Ausdruck kommt, von Interesse sein, wenn auch eine statistische Bearbeitung von Barographen- und Variographenregistrierungen vielleicht noch eine gewisse Welligkeit des Störpegels, d. h. eine Verfeinerung der Regel (24), aufzeigen wird. Wenn auch eine beobachtete Änderung des Bodendruckes aus zwei Komponenten,

einer Massen- und einer Temperaturänderung in der Luftsäule, zusammengesetzt sein kann (B. Haurwitz [*24*], J. Bjerknes [*61*]), so scheint deshalb doch das zusammenhängende Band dieser Druckeffekte physikalisch einheitliche Ursachen zu besitzen.

Die Feststellung, daß beim Durchzug von Wogenwolken über Davos bisher nie besonders regelmäßige Variographenaufzeichnungen beobachtet worden sind, braucht dabei nicht gegen die Annahme zu sprechen, daß Grenzflächenwellen aller Größenordnungen die Ursachen aller dieser Druckschwankungen sind. Die Theorie solcher Wellen an horizontalen Grenzflächen, die wiederum von B. Haurwitz [*27*, *28*, *29*] weitgehend abgeschlossen worden ist, liefert eine exponentielle Abnahme der Druckschwankungsamplitude von der Grenzfläche aus, so daß diese Amplituden sehr klein werden, sowie die Höhe der Grenzfläche größer als die Wogenlänge wird, was bei Wogenwolken gewöhnlich der Fall ist. Unter geeigneten Verhältnissen sind jedoch solche Druckschwankungen beobachtet worden (B. Haurwitz [*30*]). Eine Bestätigung der Rechnungen von Haurwitz über die Wellenlängen von Luftwogen an großem Beobachtungsmaterial fehlt meines Wissens noch; im Literaturverzeichnis findet man eine Zusammenstellung einschlägiger Arbeiten [*79—87*]. Das Spektrum dieser Luftwogen ist ein kontinuierliches, da die wichtigsten Parameter der Frequenzgleichungen, die Temperatur- und Wind„sprünge", stetig veränderlich sind. Im Gegensatz zu den Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre sind hier die Frequenzen etwa durch Änderungen der Temperaturen der Luftmassen stark verschieblich, so daß eine einmal beobachtete Schwingung rasch abbrechen oder ihre Frequenz verschieben kann. Diese Eigenschaft macht eine Vorausbestimmung des Luftdruckes sehr unsicher (vgl. dazu A. Schmauss [*55*]).

Andere Theorien beschäftigen sich mit Trägheitsschwingungen (F. Defant [*10*], V. W. Ekman [*11*]) sowie Strömungs- und Wirbelproblemen verschiedener Art [*78*]; hier ist jedoch noch kein Abschluß erreicht.

Registrierungen in Davos zeigen im Winter bei Hochdrucklage sehr persistente Schwingungen von etwa 0,03 mb Amplitude und einer Periodenlänge von rund 5 min, die auf Schwingungen der Luftmasse im Davoser Hochtal nach Art der Seiches schließen lassen. Derartige Erscheinungen haben aber nur rein örtliche Bedeutung. Für die Verhältnisse des Inntales bei Innsbruck sind sie von A. Defant [*9a*] im Sinne stehender, von W. Schmidt [*60*] im Sinne fortschreitender Wellen gedeutet worden. Im allgemeinen wird eine komplizierte, aus verschiedenen Komponenten zusammengesetzte Luftbewegung vorhanden sein, die für jeden Einzelfall eine besondere Analyse verlangt.

Die geophysikalische Bedeutung der bei Periodenforschungen bis jetzt festgestellten Perioden, deren Spektrum in Abb. 10 nach einer Zusammenstellung von W. Preusche [*51*] unter Verwendung zahlreicher von A. Defant aufgedeckter Perioden gezeichnet ist, bleibt also nach wie vor unsicher. Es ist zweifellos B. Haurwitz rechtzugeben, wenn er [*32*] fordert, daß nicht nur nach Perioden gesucht werden soll, sondern daß

auch die zugehörigen Phasenkarten angegeben werden müssen. Handelt es sich um Grenzflächenwellen, so ist die Herausschälung einzelner Perioden nur von sehr begrenztem Wert; eine Identifizierung einer Eigenschwingung der Atmosphäre durch ihre Periode allein ist unmöglich, wie ein Blick auf Abb. 10 lehrt.

Wenn man die in Arbeiten, die sich der harmonischen Analyse bedienen, gelegentlich wiedergegebenen Verteilungen der Analysenamplituden auf die Periodenlängen in der Nähe einer vermuteten Periode betrachtet, deren Maxima zur genaueren Festlegung dieser Periode dienen sollen, so möchte man die oben wiederholte Forderung von Haurwitz noch verschärfen, indem man die Benützung einer Periode verlangt, die außer einer nahe dem Maximum der Verteilung liegenden Amplitude auch noch eine möglichst klare Phasenkarte besitzt. Außerdem ist eine Erforschung der Dämpfungsverhältnisse nötig.

Die Diskussion des Spektrums der Luftdruckschwankungen ergibt eine Reihe neuer Probleme und Aufgaben, die hier noch einmal zusammengestellt werden sollen:

Windstrukturuntersuchungen nach der Schröderschen Auswertmethode sollten über die genauere Lage des Windbandes sowie die Frage nach seiner Anregung bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten Aufschluß geben. Dabei ist eine möglichst hohe Zeitauflösung, etwa bis zu $^1/_{100}$ sec anzustreben, wobei aus Abb. 8 die nötigen Empfindlichkeiten entnommen werden können.

Das Ergebnis dieser Untersuchungen wird darüber entscheiden, wie die Kennfunktionen von Variographen für das Saxer-Gutenberg-Gebiet gelegt werden sollen, um über den Anschluß des Störpegels in diesem Gebiet nach höheren und tieferen Frequenzen hin zu entscheiden.

Eine statistische Bearbeitung der Registrierungen von Barographen und Variographen vom Typ I bis III sollte über die Struktur des Bandes der Schwankungen mit mehr als einer Minute Dauer Aufschluß geben, die möglicherweise für die Zyklonentheorie Bedeutung haben könnte, da der Zusammenhang dieses Bandes geophysikalisch einheitliche Ursachen vermuten läßt.

Die Lage dieses Bandes von Luftdruckschwankungen sollte für verschiedene Klimate und Breiten festgestellt werden. Aneroidbarographen und Schmidt-Variographen geben dazu eine genügende instrumentelle Ausrüstung.

Die Aufstellung von Variographen an benachbarten Tal- und Bergstationen dürfte wertvolle Aufschlüsse über die Natur dieser Art von Druckschwankungen liefern.

Die Identifizierung von Eigenschwingungen der Gesamtatmosphäre dürfte mit Variographen großer Empfindlichkeit und dem Kennfunktionstyp (23) zur Abschneidung des Windbandes am leichtesten in niederen Breiten gelingen, wo zu erwarten ist, daß das verdeckende Band der langperiodigen Schwankungen gelegentlich kaum angeregt sein wird.

Literaturverzeichnis.

1. Alfani, P. G.: Su Di Un Microbarografo. Met. pratt. **21**, 97 (1940).
2. Baur, F.: Versuch einer Vorausberechnung des Niederschlagscharakters usw. Meteorol. Z. **1923**, 232.
3. Becker, R.: Zur Dynamik anisobarer Bewegungen an Gleitflächen. Gerlands Beitr. Geophys. **21**, 1 (1929).
4. Benndorf, H. u. W. Zimmermann: Über einen neuen einfachen Luftdruckvariographen. Meteorol. Z. **1938**, 273.
5. Benioff, H. u. B. Gutenberg: Waves and Currents Recorded by Electromagnetic Barographs. Bull. Amer. Met. Soc. **1939**, 421.
6. Bjerknes, J.: Theorie der außertropischen Zyklonenbildung. Meteorol. Z. **1937**, 462.
7. Boddin, J.: Die 72tägige Luftdruckwelle im Sommer 1922. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **11**, 201 (1938).
8. v. d. Borne, G.: Das Variometerprinzip und seine Anwendung in der Meteorologie. Meteorol. Z. **1913**, 201.
9. Courant, R.: Differential- und Integralrechnung I. 1927, S. 397.
9a. Defant, A.: Innsbrucker Föhnstudien II, Periodische Temperaturschwankungen bei Föhn und ihr Zusammenhang mit stehenden Luftwellen. Wien. Denkschr. Math.-nat. Kl. **80**, 105 (1906).
10. Defant, F.: Trägheitsschwingungen im Ozean und in der Atmosphäre. Veröff. Met. Inst. Berlin **4**, Heft 2 (1940).
11. Ekman, V. W.: Trägheitsschwingungen und Trägheitsperiode im Meere. Ann. Hydrogr. u. mar. Met. **1941**, 238.
12. Ertel, H.: Advektiv-dynamische Theorie der Luftdruckschwankungen und ihrer Periodizitäten. Gerlands Beitr. Geophys. **46**, 227 (1935).
13. Exner, M.: Über oszillatorische Bewegungen der Luft. Ann. Hydrogr. u. mar. Met. **1913**, 145.
14. — Über oszillierende Strömungen in Wasser und Luft. Ann. Hydrogr. u. mar. Met. **1919**, 155.
15. Findeisen, W.: Ergebnisse von Feinuntersuchungen des atmosphärischen Windgefüges. Meteorol. Z. **1936**, 6.
16. Fletcher, H. u. W. Munson: J. Acoust. Soc. Amer. **5**, 82 (1933).
17. Flögel, J. H. L.: Über Variometerbeobachtungen und eine handliche Form des Variometers. 73. Vers. dtsch. Naturf. u. Ärzte. Hamburg 1901, S. 210.
17a. Flohn, H.: Experientia **1947**, 319, 468.
18. Fujiwhara, S.: On the Theory of the Shaw-Dines Microbarograph. J. Met. Soc. Japan **1912**, 49.
19. Golay, M. J. E.: A Differential Hot Wire Gaseous Flow Meter. Rev. Scient. Instr. **9**, 55 (1938).
20. Gutenberg, B. u. H. Benioff: Observations with Electromagnetic Microbarographs. Nature **144**, 478 (1939).
21. — — Atmospheric Waves and Currents Recorded by Electromagnetic Barographs. U. G. G. I. Assoc. Met. Washington 1939, 61.
22. — — Atmospheric-Pressure Waves Near Pasadena. Trans. Amer. Geophys. Union **1941**, 424.
23. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie I, 1939.
24. Haurwitz, B.: Beziehungen zwischen Luftdruck- und Temperaturänderungen. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **3**, 267 (1927).
25. — Zur Berechnung von oszillatorischen Luft- und Wasserströmungen. Gerlands Beitr. Geophys. **27**, 26 (1930).

26. Haurwitz, B.: Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **5**, 1 (1931).
27. — Über die Wellenlänge von Luftwogen. Gerlands Beitr. Geophys. **34**, 213 (1931).
28. — Über Wellenbewegungen an der Grenzfläche zweier Luftschichten mit linearem Temperaturgefälle. Beitr. Phys. fr. Atmosph. **19**, 47 (1932).
29. — Über die Wellenlänge von Luftwogen. Gerlands Beitr. **37**, 16 (1932).
30. — Microbarometric Oszillations at Blue Hill. Bull. Amer. Met. Soc. **1935**, 153.
31. — The Oscillations of the Atmosphere. Gerlands Beitr. Geophys. **51**, 195 (1937).
32. — Bemerkungen zur advektiv-dynamischen Theorie der Luftdruckschwankungen. Gerlands Beitr. Geophys. **51**, 422 (1937).
33. Hefner-Alteneck, F. v.: Über einen Apparat zur Beobachtung und Demonstration kleinster Luftdruckschwankungen. Ann. Physik **57**, 468 (1896); Verh. Phys. Ges. Berlin 1895.
34. v. Helmholtz, H.: Über atmosphärische Bewegungen. Berl. Ber. **1**, 647 (1888); **2**, 761 (1889); **2**, 853 (1890).
35. Hopfner, F.: Mathematische Grundlagen zu einer astronomischen Theorie der Klimaschwankungen. Gerlands Beitr. Geophys. **15**, 354 (1926).
36. Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. 1939, S. 171, 187.
37. Kleinschmidt, E.: In Linkes Meteorologischem Taschenbuch **I**, 1931, 144; **V**, 1939, 65.
38. — Handbuch der Meteorologischen Instrumente 1935, S. 327.
39. Köhne, K.: Untersuchungen über Feindruckwellen. Z. Geophysik **1940**, 310.
40. Langley, S. P.: The Internal Work of Wind. Amer. J. Sci. **47**, 41 (1894).
41. Less, E.: Über kurze Luftdruckschwankungen, welche in Begleitung stärkerer Blitzschläge auftreten. Meteorol. Z. **1888**, 151.
42. Lettau, H.: Theoretische Ableitung und physikalischer Nachweis einer 36tägigen Luftdruckwelle. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **5**, 107 (1931).
43. Loeser, G.: Böigkeitsschreiber. Meteorol. Z. **1944**, 77.
44. Margules, M.: Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa **101**, 597 (1891); **102**, 11 (1892).
45. Mildner, P.: Über Luftdruckwellen. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **3**, 173 (1924 bis 1927).
46. Naber, L.: Das Luftbarometer. Ann. Physik **4**, 815 (1901).
47. Oehmisch, W.: Analyse einer 72tägigen Luftdruckwelle. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **13**, 175 (1940).
48. Pfau, R.: Die 10tägige Luftdruckwelle im Sommer 1934 und ihre Dämpfungserscheinungen. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **9**, 219 (1938).
49. Pfeiffer, C. A.: Feinregistrierungen des Luftdruckes. Meteorol. Z. **1940**, 177.
50. Pettersen, S. u. Mitarbeiter: Convection in Theory and Practice. Geophys. Publjon. **16**, Nr. 10 (1946).
51. Preusche, W.: Über Niederschlagsperioden in den gemäßigten Zonen der Erde. Diss. Leipzig 1934.
52. Reuter, F.: Die synoptische Darstellung der halbjährigen Druckwelle. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **7**, 257 (1936).

53. Robitzsch, M.: Periodizitäten im Gang des Luftdruckes und der Lufttemperatur. Veröff. Aeron. Obs. Lindenberg **14**, 137 (1922).
54. Saxer, L.: Elektrische Messung kleiner atmosphärischer Druckschwankungen. Helv. Phys. Acta **18**, 527 (1945).
55. Schmauss, A.: Wie steht es um die meteorologischen Perioden? Meteorol. Z. **1927**, 176.
56. Schmidt, W.: Ein Apparat zur Aufsuchung regelmäßiger Wellen im Luftdruck. Ann. Physik **27**, 346 (1908).
57. — Zur Beobachtung und Analyse rascher Luftdruckschwankungen. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa **118**, 885 (1909); **119**, 1101 (1910).
58. — Der Variograph, seine Aufzeichnungen und deren Verwendung in einigen Fragen der Gewitterforschung. Meteorol. Z. **1912**, 406.
59. — Ein einfacher Flammenregler. Ann. Physik **39**, 1609 (1912).
60. — Luftwogen im Gebirgstal usw. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa **122**, 835 (1913).
61. — Über Luftwogen. Meteorol. Z. **1914**, 170.
62. Schröder, A.: Untersuchungen über die Windstruktur und den Bau der Windmeßgeräte. Z. Geophysik **1938**, 198.
63. v. Schubert, O.: Die dreijährige Luftdruckwelle. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **3**, 337 (1924 bis 1927).
64. Schwerdtfeger, W.: Zur Theorie polarer Temperatur- und Luftdruckwellen. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **4**, 253 (1931).
65. Shaw, U. u. W. H. Dines: The Study of the Minor Fluctuations of Atmospheric Pressure. Quart. J. **1905**, 39.
66. Storm van Leeuwen, W. u. J. Booij: Studien über die physiologische Wirkung des Föhns. Gerlands Beitr. Geophys. **39**, 105 (1933).
67. Storm van Leeuwen, W. u. Mitarbeiter: Studien über die physiologische Wirkung des Föhns. Gerlands Beitr. Geophys. **44**, 400 (1935).
68. Suckstorff, G. A.: Ein mechanisch registrierender Barograph hoher Empfindlichkeit. Z. Geophysik **1936**, 245.
69. Suzuki, S. u. H. Oomori: The Leaking Microbarograph Used as a Variograph. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **10**, 181 (1928).
70. Taylor, G. I.: Waves and Tides in the Atmosphere. Proc. Roy. Soc. A **126**, 169 (1930).
71. Toepler, M.: Über Beobachtungen von Windwogen. Ann. Physik **57**, 472 (1896).
72. — Über Beobachtungen von kurz dauernden Luftdruckschwankungen. Ann. Physik **12**, 789 (1903).
73. Wahl, E.: Untersuchungen über den jährlichen Luftdruckgang. Meteorol. Z. **1941**, 313.
74. Weickmann, L.: Das Wellenproblem der Atmosphäre. Meteorol. Z. **1927**, 241.
75. West, J.: Minimale Druck- und Temperaturschwankungen in der Atmosphäre. Ann. Physik **65**, 943 (1898).
76. Whipple, F. J. W.: On Phenomena Related to the Great Siberian Meteor. Quart. J. **1934**, 505.
77. Wünsche, W.: Über die Existenz langsamer Luftdruckschwingungen auf der rotierenden Erde. Veröff. Geophys. Inst. Leipzig, II. Ser. **11**, 153 (1938).
78. Siehe Journal of Meteorology seit 1944 und
Wagemann, H.: Ein Beitrag zur Erklärung der Luftdruckverteilung über dem Atlantischen Ozean. Ann. Hydrogr. **1943**, 236.

79. Brunt, D.: The Period of Simple Vertical Oszillations in the Atmosphere. Quart. J. **1927**, 30.
80. Goldie, A. H. R.: Waves at an Approximately Horizontal Surface of Discontinuity in the Atmosphere. Quart. J. **1925**, 239.
81. Johnson, N. K.: Atmospheric Oszillations Shown by the Microbarograph. Quart. J. **1929**, 19.
82. Namekawa, T.: A Study of the Minor Fluctuation of the Atmospheric Pressure. Memoirs Kyoto Univ. **17**, 405 (1934); **18**, 83 (1935); **19**, 237 (1936).
83. Sekera, Zd.: Über die Bedeutung der Übergangsschicht in der Theorie der Helmholtzschen Luftwogen. Gerlands Beitr. Geophys. **54**, 9 (1939).
84. Suzuki, S.: Zusammenhang zwischen regelmäßigen Luftdruckschwankungen und den meteorologischen Elementen. Meteorol. Z. **1925**, 377.
85. — u. H. Oomori: On the Atmospheric Waves. Gerlands Beitr. Geophys. **49**, 301 (1927).
86. Trey, F.: Ein Beitrag zum Studium der Luftwogen. Meteotol. Z. **1919**, 25.
87. Wegener, A.: Studien über Luftwogen. Beitr. Phys. fr. Atmosph. **2**, 55 (1906); **4**, 23 (1912).

551:461.2:525.6

(Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck.)

Über interne Gezeitenwellen und ihre Stabilitätsbedingungen.

Von

A. Defant.

Mit 17 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Nach einer Einleitung über die wesentlichsten Eigenschaften interner Gezeitenwellen wurde eine Reihe von speziellen Fällen solcher Wellen (Straße von Gibraltar bei Nipptide, „Meteor"-Ankerstation 254 im äquatorialen Atlantischen Ozean, „Meteor"-Stationen 369 und 366 auf dem Kap-Verde-Schelf vor NW-Afrika, Straße von Gibraltar bei Springtide, Straße von Messina) eingehend diskutiert. Dabei wurde besondere Aufmerksamkeit der Erscheinung der fortschreitenden Änderung des Wellenprofils geschenkt und diese bis zur völligen Degeneration der Welle verfolgt. Diese Degeneration, die an den Eintritt unstabiler Verhältnisse geknüpft erscheint, kann sich bis zur internen Brandung der Gezeitenwelle (interne Bore) steigern.

Als Ursache dieser fortschreitenden Formveränderung des Wellenprofils wurde einerseits entsprechend der Fjeldstadschen Theorie die mit Fortschreiten der internen Gezeitenwelle auf dem Schelf vorhandene Tiefenabnahme der Wasserschicht, anderseits das Auftreten von dynamischer Instabilität bei bestimmtem Stromaufbau im Ozean erkannt. Namentlich letzterer Umstand scheint für die Ausbildung einer Asymmetrie des Wellenprofils interner Gezeitenwellen bis zur inneren Brandung ausschlaggebend zu sein.

Auf die ozeanographische Bedeutung dieser Erscheinung für die Mischungsvorgänge auf dem Schelf wurde besonders hingewiesen.

Summary. After an introduction on the most essential qualities of internal tidal waves a series of special cases of such waves (Strait of Gibraltar at Neaptide, „Meteor"-anchor-station 254 in the equatorial Atlantic, „Meteor"-stations 369 and 366 on Cap Verde continental-shelf off NW Africa, Strait of Gibraltar at Spring tide, Strait of Messina) have been thoroughly discussed. Particular attention has been paid to the phenomenon of the progressive change of the wave profile which was pursued to the total degeneration of the wave. This degeneration seems to be tied to the appearance of unstabl conditions and may increase to internal breakers of the tidal wave (internal bore).

The decline of depth of the water layer on the continental-shelf with the progression of the internal wave according to FJELDSTAD's theory on the one hand, on the other hand the appearance of dynamic instability at a certain

stream structure in the ocean were recognised as cause of this progressive change of shape of the wave profile. In particular the last mentioned circumstance appears to be decisive for the formation of an asymmetrical wave profile of internal tidal waves up to internal breakers.

It was particularly referred to the oceanographic importance of this phenomenon for the mixing processes on the continental-shelf.

Résumé. Après une introduction sur les qualités les plus essentielles des marées internes, une série de cas de telles ondes (détroit de Gibraltar à marée basse, station d'ancrage „Météor" 254 dans l'Atlantique équatorial, stations d'ancrage „Météor" 369 et 366 sur la plate-forme continentale du Cap-Vert au NW de l'Afrique, détroit de Gibraltar à haute marée, détroit de Messine) est discutée à fond. Une attention particulière a été attribuée au phénomène de changement progressif du profil d'onde et elle est poursuivie jusqu'à la dégénération de l'onde qui apparaît d'être liée à l'entrée de conditions instables et qui peut s'accroître jusqu'au ressac interne de la marée (Bore interne).

D'une part selon la théorie de Fjeldstad la diminution de hauteur de la couche d'eau avec la progression de la marée interne existant sur la plate-forme continentale, d'autre part l'apparition d'instabilité dynamique au cas d'une certaine structure des courants dans l'océan ont été reconnus d'être la cause de ce changement de forme du profil d'onde. Surtout cette dernière circonstance apparaît d'être décisive pour la formation d'un profil d'onde asymétrique des marées internes jusqu'au ressac interne.

En particulier l'importance océanographique de cette apparition pour les procédés de mélange sur la plate-forme continentale a été indiquée.

Sowohl bei den qualitativen Betrachtungen sowie bei den quantitativen theoretischen Berechnungen der allgemeinen Gezeitentheorie pflegte man jede der drei Hauptschichten im Aufbau der Gesamterde für sich als homogen, im wesentlichen also konstanter Dichte anzunehmen, trotzdem bekannt ist, daß die zwei Hüllen des Erdkerns sowie dieser selbst in Schichten nach innen zunehmender Dichte angeordnet sind, in denen sogar Dichtesprünge vorkommen, die stellenweise fast bis zur physikalischen Diskontinuität anwachsen können. Die fluterzeugenden Kräfte von Mond und Sonne greifen die gesamte Masse in den zwei Erdhüllen und im Erdkern an; ist jede dieser Erdschichten in sich homogen, dann ist die Möglichkeit der Ausbildung innerer Gezeitenwellen, wenn man die Auswirkung der fluterzeugenden Kräfte auf innere Sprungschichten der Dichte als solche bezeichnen will, nicht gegeben. Sind aber die Medien in jeder der drei Erdschichten geschichtet, sind innere Sprungschichten der Dichte in ihnen einigermaßen gut ausgebildet, dann sind solche innere Gezeitenwellen zu erwarten, ja wir müssen ihnen sogar beträchtlichere Amplituden zuschreiben, als den Gezeiten an den Grenzflächen zwischen den einzelnen Hauptschichten im allgemeinen Aufbau der Erde.

Ob es interne Gezeitenwellen der Erdfeste gibt, von der man weiß, daß sie aus mehreren Schichten ungleicher Dichte aufgebaut ist, ob es insbesondere in der stark geschichteten Erdkruste zur Ausbildung solcher interner Gezeitenwellen kommt, wissen wir nicht. Wären solche interne

Gezeitenwellen vorhanden und hätten sie größere Schwingungsweiten, so könnte man ihnen vielleicht eine gewisse tektonische Bedeutung nicht absprechen. In der Atmosphäre, die namentlich in ihren hohen und höchsten Schichten von permanenten, weit ausgedehnten, ja vielleicht planetarischen Sprungschichten der Dichte durchsetzt ist, werden innere Gezeitenwellen großen Ausmaßes vorhanden sein und diese werden natürlich viel größere Amplituden haben als jene, welche in den unteren Schichten der Atmosphäre auftreten und die man an der Erdoberfläche in den kleinen Barometerschwankungen mit Gezeitenperiode feststellen kann. In den höchsten Atmosphärenschichten sind die internen atmosphärischen Gezeitenwellen, wie die magnetischen Beobachtungen unzweifelhaft nahelegen, die Ursache der bedeutenden lunaren Variationen des erdmagnetischen Feldes.

Daß interne Grenzflächenwellen mit Perioden der verschiedensten Länge im offenen Ozean vorhanden sind, steht wohl fest. Zuerst sind sie von Fridtjof Nansen [*1*] auf seiner Nordpolexpedition festgestellt worden, später sind ähnliche Beobachtungen von ihm und Helland-Hansen [*2*] im norwegischen Meere gemacht worden und eingehend im bekannten Werk „The Norwegian Sea" diskutiert worden. Otto Pettersson [*3*] hat namentlich in den dänischen und schwedischen Fjorden große vertikale Verlagerungen der Wassermassen an inneren Grenzflächen im Aufbau des Meeres nachgewiesen und wohl zuerst darauf hingewiesen, daß sie mit den Gezeitenkräften und ihren Auswirkungen in enger Verbindung stehen, d. h. daß sie gezeitenperiodischer Natur sind. Eingehende Beobachtungen sind auch auf der Michael-Sars-Expedition im Nordatlantischen Ozean gesammelt worden, und anläßlich einer längeren Reihe von Simultanbeobachtungen in der Faröer-Shetland-Rinne konnten interne Wellen mit Gezeitencharakter durch eine längere Zeit hindurch verfolgt werden [*4*].

Das umfassendste und ausführlichste Beobachtungsmaterial über interne Wellen an Sprungschichten der Dichte im freien Ozean ist wohl auf den Ankerstationen der „Meteor"-Expedition 1925—1927 gesammelt worden. Es hat im „Meteor"-Werk eine eingehendere Verarbeitung erfahren [*5*]. Weitere Messungen sind dann namentlich auf der „Snellius"-Expedition gesammelt und von L. Lek [*6*] verarbeitet worden. Eine teilweise Verarbeitung haben auch die ausführlichen Beobachtungen erfahren, die W. Ekman und B. Helland-Hansen [*7*] bei ihren Strommessungen im Nordatlantischen Ozean gewonnen haben. Die späteren Fahrten des „Meteor", namentlich die zwei ersten Teilfahrten der Nordatlantischen Expedition 1937 und 1938 in die Ozeangebiete zwischen den Kanarischen und Kap-Verdeschen Inseln haben auf ihren Ankerstationen neues, noch nicht veröffentlichtes, zum Teil auch noch nicht verarbeitetes Beobachtungsmaterial zur Frage der internen Wellen erbracht [*8*] und schließlich ist bei der bisher längsten Ankerstation, jener des Forschungsschiffes „Altair" im Stromstrich des Golfstromes nördlich der Azoren anläßlich der internationalen Golfstromuntersuchung 1938 [*9*] wohl ohne Zweifel klar geworden, daß interne Gezeitenwellen wohl stets mit dem normalen

Ablauf des Gezeitenphänomens des freien Ozeans gekoppelt sind und als stets vorhandene allgemeine Begleiterscheinung der durch die flut-erzeugenden Kräfte erzwungenen periodischen Wasserbewegungen angesehen werden müssen.

In den folgenden Ausführungen soll nach kurzen Bemerkungen über das Wesen interner Wellen, insbesondere solcher mit Gezeitencharakter auf einige besondere Punkte eingegangen werden, die die *Stabilität* solcher interner Gezeitenwellen betreffen und an mehreren ausgesuchten Beispielen gezeigt werden, wie es bei bestimmten Bedingungen des ozeanischen Aufbaues und der gegebenen Stromverhältnisse zu *internen Gezeitenbrandungen* kommen kann. Diese inneren Brandungserscheinungen haben

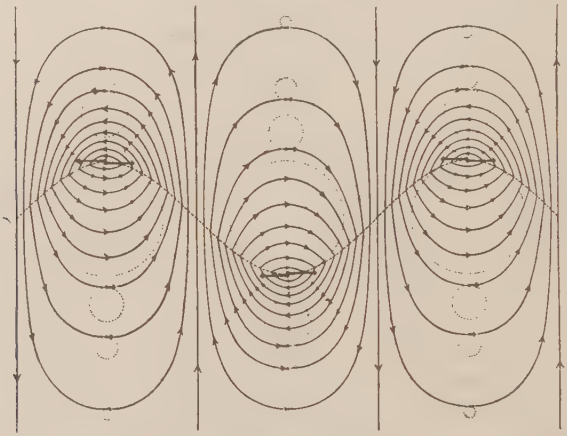


Abb. 1. Stromlinien (ausgezogen) und Orbitalbahnen (fein punktiert) in einer von links nach rechts fortschreitenden inneren Welle an der Grenzfläche zweier verschieden dichten Medien. (Nach V. Bjerknes.)

für Fragen der Vermischung der Wassermassen, namentlich auf den Schelfgebieten der Kontinentalränder ein großes Interesse und verdienen näher verfolgt zu werden.

Bekanntlich sind an der Grenzfläche zwischen einer homogenen Unterschicht dichteren (schwereren) Wassers und einer homogenen Oberschicht weniger dichten (leichteren) Wassers interne Wellen möglich, deren Strombahnen und Orbitalbahnen der Wasserteilchen bei einer solchen *fortschreitenden* Welle durch die Abb. 1 gegeben sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c von Wellen bestimmter Wellenlänge λ längs der Grenzfläche wird durch das Vorhandensein der Oberschichte zu jener an der freien Oberfläche c_0 im Verhältnis $\sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}}$ verkleinert, d. h. $c = c_0 \sqrt{\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}}$, wobei ϱ_1 die Dichte der unteren, ϱ_2 jene der oberen Wassermasse ist. Die Verminderung ist beträchtlich, z. B. für Verhältnisse, wie sie im Ozean vorkommen, ist bei $\varrho_2 = 1{,}027$, $\varrho_1 = 1{,}028$ (Dichte-

unterschied 10^{-3}), $c = \frac{c_0}{45{,}3}$, d. h. die Wellengeschwindigkeit der internen Welle ist rund 45mal kleiner als von Wellen gleicher Wellenlänge an einer freien Oberfläche. Bei diesen internen Wellen ist die vertikale Verlagerung der Wassermassen an der Grenzfläche am größten, nach oben und unten hin nimmt die Amplitude dieser Verlagerungen rasch ab und auch bei nicht besonders großer Mächtigkeit der Oberschichte ist die Amplitude der inneren Welle an der freien Oberfläche so klein, daß dort eine Wellenbewegung nicht mehr wahrzunehmen ist. Die Auswirkung der internen Wellen beschränkt sich somit, soweit es sich um reine Wellen an einer Diskontinuitätsfläche handelt, auf die unmittelbare Umgebung der Grenzfläche, eine Tatsache, die sehr wichtig für die Wirkung der Wellenbewegung auf die thermische und haline Schichtung in den angrenzenden Wassermassen ist. Man kann auch im Laboratorium in einem mit ungleich dichten Flüssigkeiten gefüllten Trog durch eine Störung, z. B. durch eine langsame Verschiebung eines sektorförmigen Körpers am Boden des Troges, interne Wellen erzeugen und man kann erkennen, daß, trotzdem die Oberschichte gegenüber der Unterschichte nicht sehr dick ist, die freie Oberfläche der oberen Flüssigkeit praktisch eben bleibt, auch dann, wenn die Wellenbewegung an der Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten beträchtliche Ausmaße annimmt.[1]

Auch im Meer und in den Seen werden sich beim Vorhandensein innerer Grenzflächen durch irgend welche Störungen innere Wellen ausbilden können, die längs der Grenzfläche mit Geschwindigkeiten wandern, die vom Unterschied der Dichte der beiden Wasserarten und von ihrer vertikalen Mächtigkeit abhängen, die aber jedenfalls vielmals geringer sind als die Wellengeschwindigkeiten von Wellen ähnlicher Wellenlänge an der freien Oberfläche. In Wirklichkeit kommen scharfe physikalische Diskontinuitätsflächen in der Natur nur selten vor, hingegen zeigen sich in den „Sprungschichten" eine mehr oder minder große, aber *stetige* Änderung der Dichte mit der Tiefe. J. E. Fjeldstad [*10*] hat auch für einen solchen vertikalen Dichteaufbau die Theorie interner Wellen entwickelt. Er findet, daß in diesem Fall in jeder Tiefe unendlich viele Wellen vorgegebener Periode möglich sind, die alle verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten haben. Aber diese Geschwindigkeiten stehen zueinander in einem harmonischen Verhältnis. Die längste Welle ist zumeist, aber nicht immer die wichtigste. Fjeldstad hat auch eine Methode angegeben, die gestattet, aus dem gegebenen vertikalen Dichteaufbau die verschiedenen möglichen internen Wellen von Gezeitenperiode zu berechnen, ebenso lassen sich auch die zu diesen Wellen gehörigen periodischen Stromgeschwindigkeiten berechnen, so daß Vergleiche mit den Ergebnissen von Strommessungen durchgeführt werden können.

Der Grund, warum verhältnismäßig wenige, in allen Punkten vollbefriedigende Beobachtungen über interne Wellen im freien Ozean vor-

[1] Photographien derartiger Versuche findet man in A. Defant: Theoretische Überlegungen und experimentelle Untersuchungen zum Aufbau hoher Zyklonen und Antizyklonen. Ber. d. Akad. d. Wiss. Wien. II. A. 1913.

liegen, liegt in den äußeren Umständen, unter denen solche Beobachtungen gewonnen werden können. Wenn es auch heutzutage durchaus keine unüberwindlichen Schwierigkeiten mehr bereitet, ein Expeditionsschiff auch auf große Wassertiefen für eine ganze Reihe von Tagen zu verankern, so erfordern laufende ozeanographische Serienmessungen in kurzen, mindestens einstündigen Intervallen durch mehrere Tage hindurch einen sehr großen Arbeitsaufwand, der nur mit genügend großem Personal zu bewältigen ist. Kommen noch Strommessungen in einer größeren Zahl von Tiefenhorizonten hinzu, die eigentlich notwendig sind, will man alle Elemente der internen Wellen erfassen, so steigert dies die Arbeit auf ein kaum zu bewältigendes Maß. Aber nur die möglichst genaue zeitliche Verfolgung der Isothermen und Isohalinen bzw. der Isopyknen in einer großen Zahl von Tiefen bei einer größten Schaarung der Beobachtungen im Bereich der Sprungschichte gibt die Möglichkeit, ein Bild des *zeitlichen Ablaufes* einer eventuell vorhandenen inneren Welle an einem Ort zu gewinnen. Aus den Messungen an einer Station allein lassen sich aber noch keine Anhaltspunkte über die Wellenlänge solcher interner Wellen gewinnen, auch über die Fortpflanzungsrichtung derselben läßt sich bei Beobachtungen an einer Station allein nichts aussagen. Nur aus der theoretischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die man aus dem vertikalen Gefälle der Dichte am Beobachtungsort ungefähr ermitteln kann, läßt sich, da die Periode der Welle gegeben ist, eine *Vorstellung über die Länge der internen Wellen* gewinnen. Solche Berechnungen haben bei Fällen mit einer Gezeitenperiode von etwa 12 Stunden ergeben, daß solche interne Wellen mit Gezeitencharakter „lange" Wellen sind, d. h. Wellen, deren Wellenlänge vielmals größer ist als die Wassertiefe, auch bei den größten Tiefen, die im Weltmeer vorkommen. Sie haben also den Charakter von „Flutwellen", was für die Deutung mancher Beobachtungstatsachen von Wichtigkeit ist. Die tagelang durchgeführten Serienmessungen auf den Ankerstationen im freien Ozean und die gleichzeitigen Strommessungen bestätigen diesen Schluß. Die inneren Verlagerungen der Wassermassen haben *Gezeitencharakter*, und neben anderen Störungen unterliegen sie in erster Linie der halbmondtägigen Periode; es scheint, daß sie mit den Gezeiten an der Oberfläche und mit den Gezeitenströmen dieser Schwankungen irgendwie zeitlich gekoppelt sind. Aber scheinbar ist diese Koppelung nicht immer derselben Art und von Ort zu Ort verschieden.

Ein anschauliches Beispiel für interne Wellen möge die Verhältnisse erläutern. In der Straße von Gibraltar findet man beständig zwei Wasserarten verschiedener Art übereinandergelagert: Einerseits in den oberen Schichten nach Osten strömend das leichtere Atlantische Wasser, anderseits darunter nach Westen strömend das schwerere Mittelmeerwasser. Der Übergang von der einen zur anderen Wasserart vermittelt eine namentlich im Mittelteil der Meeresstraße sehr gut ausgebildete Sprungschichte der Dichte,[1] die in der Straße selbst etwas von Westen nach

[1] Siehe hierzu besonders G. Schott: Die Wasserbewegungen im Gebiete der Gibraltarstraße. Journ. du Conseil, **III/2**. Kopenhagen 1928.

Osten ansteigt. Abb. 2 gibt einen Längsschnitt der Dichte durch die ganze Straße, und zwar mittlere Verhältnisse, wie sie in der Übergangszeit vom Frühling zum Sommer vorhanden sind. Zu dieser Zeit gewinnt der

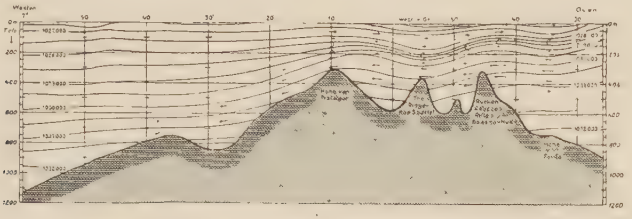


Abb. 2. Längsschnitt der Dichte durch die Straße von Gibraltar (mittlere Verhältnisse, Übergangszeit vom Frühling zum Sommer, Linien gleicher Dichte in kg/cbm = 1000 ϱ_t im Intervall von 0,5 kg/cbm). Die Pfeile geben die Richtung des Grundstromes an.

Atlantische Strom der Oberflächenschichte an Intensität, der mittelmeerische Strom in der Tiefe wird hingegen schwächer. Die Sprungschichte der Dichte tritt in der vertikalen Verteilung der Isopyknen recht deutlich in mittleren Tiefen von 200 bis 250 m in Erscheinung,

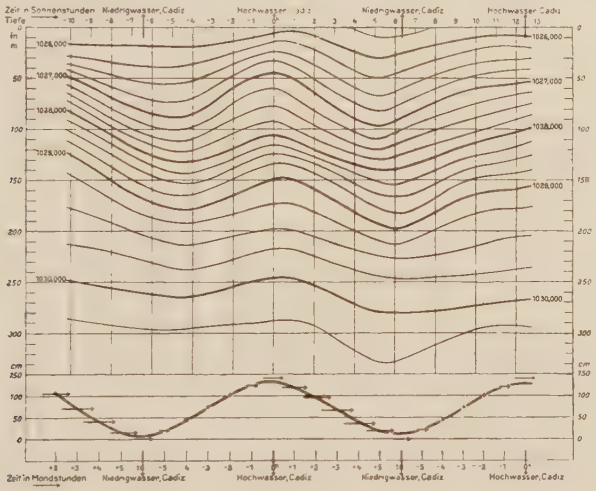


Abb. 3. „Dana" Station 1138 (35° 59′ N, 5° 30′ W, 8., 22 Uhr, bis 9. Oktober 1921, 20 Uhr): Linien gleicher Dichte (kg/cbm). Darunter die Gezeitenkurve (Wasserstandsänderung) von Cadix für dieselbe Zeit. Die Pfeile geben Richtung und Stärke der Gesamtströmung (Grundstrom + Gezeitenstrom) in den oberen Schichten für die Mitte der Meeresstraße.

während die Wassertiefe in der Hauptrinne der Straße zwischen 300 und 600 m schwankt. Diese Sprungschichte bewegt sich im Takte der Gezeiten mit großer Regelmäßigkeit auf und ab, so daß diese internen Gezeitenwellen abwechselnd mit einer Verstärkung und Abschwächung des Transportes mittelmeerischen Wassers in den Atlantischen Ozean ver-

knüpft sind. Das dänische Forschungsschiff „Dana" hat in der Zeit vom 8. bis 10. Oktober 1921 auf der Station 1138 in 35° 59′ N, 5° 30′ W v. Gr. zumeist im dreistündigen Intervall ozeanographische Serienmessungen ausgeführt [*11*], die in ausgezeichneter Weise das Vorhandensein bedeutender interner Wellen zeigen. Abb. 3 gibt für die Zeit von etwa 8. Oktober 22 Uhr bis 9. Oktober 20 Uhr den Verlauf der Linien gleicher Dichte von der Oberfläche bis zu Tiefen von 300 m. Darunter steht zum Vergleich der stets gut entwickelten und in regelmäßiger Form ablaufenden inneren Welle, die die ganze Wassermasse der Meeresstraße besonders im Bereich der Sprungschichte umfaßt, für dieselbe Zeit der Gezeitenverlauf (Wasserstandskurve) von Cadix (6° 12′ W v. Gr.), sowie an dieser durch Pfeile angedeutet die Richtung und Stärke des Gesamtstromes (Grundstrom + Gezeitenstrom) in den oberen Schichten in der Mitte der Meeresstraße. Zur Zeit der Beobachtungen herrschte *Nipptide*. Man erkennt auf den ersten Blick den Zusammenhang zwischen der Oberflächengezeit, dem Gezeitenstrom und den vertikalen Verlagerungen der Wassermassen im Bereich der Sprungschichte. Der Gezeitenvorgang an der Oberfläche der Straße geht im wesentlichen parallel mit der internen Welle. Eine genaue Analyse dieser Erscheinung haben auf Grund der Schwankungen der Isohalinen J. P. Jacobsen und Helge Thomson [*12*] vorgenommen und beim Vergleich mit den gleichzeitigen Gezeitenkurven von Gibraltar gezeigt, daß, während in Gibraltar der Wasserstand am 10. Oktober um 48,6 cm schwankte, die Schwingungsweite der Sprungschicht (Unterschied der höchsten und tiefsten Lage der $37^0/_{00}$ Isohaline) 43 m betrug und der Höchststand 0,7 Mondstunden nach jenem des Wasserstandes in Gibraltar eintrat. Die Koppelung der inneren Gezeitenwelle mit der Oberflächengezeit läßt sich in diesem Falle, in dem es sich um eine Erscheinung in einer seitlich beengten, langgestreckten Wassermasse handelt, leicht verstehen. Die Verstärkung des Stromes in der oberen Schichte, die Hand in Hand mit einer Abschwächung des Unterstromes geht, bedingt eine Senkung der Sprungschichte, eine

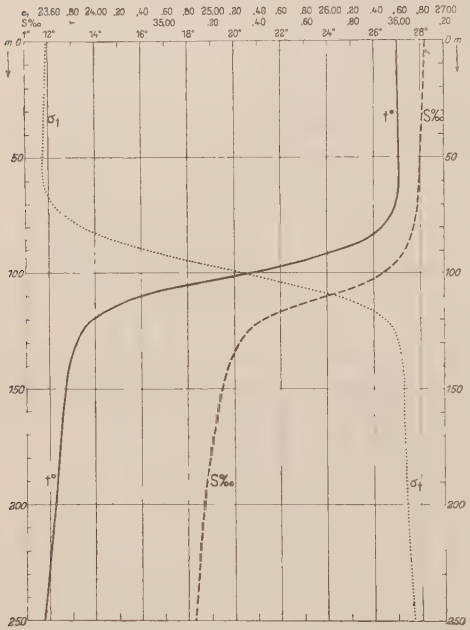


Abb. 4. Vertikale Verteilung der Temperatur t, des Salzgehaltes S und der Dichte σ_t bis 250 m auf der „Meteor"-Ankerstation 254 (2° 27′ S, 34° 57′ W, 31. Jänner bis 2. Februar 1927).

Abschwächung des Oberstromes zusammen mit einer Verstärkung des Unterstromes hingegen eine Hebung derselben. Der normale Gezeitenablauf erzwingt in diesem Fall periodische Verlagerungen der Sprungschichte mit der gleichen Periode, also eine innere Gezeitenwelle. In einem solchen Fall spielt sich der ganze Vorgang gesetzmäßig und ohne wesentliche Störungen ab.

Ein weiteres instruktives Beispiel einer internen Gezeitenwelle soll im folgenden für den freien Ozean gegeben werden: Das Forschungsschiff „Meteor" hat vor der Küste Südamerikas, nördlich von Kap San Roque, die Ankerstation 254 (2° 27′ S, 34° 57′ W v. Gr., 31. Jänner bis 2. Februar 1927, mittl. Wassertiefe 3910 m) ausgeführt, bei der die in Abb. 4 wiedergegebene mittlere Verteilung der Temperatur, des Salzgehaltes und der Dichte gefunden wurde. Bis 70 m war eine nahezu homogene Deckschichte vorhanden, auf der in einer Schichte von 40 m ein überaus rascher Abfall der Temperatur um rund 13° und ein Abfall des Salzgehaltes um $0{,}8\,^0/_{00}$ erfolgte. Die Dichte σ_t springt von 23,56 in 60 m auf 26,62 in 130 m, so daß der Dichtesprung in dieser idealen Grenzfläche rund 3×10^{-3} beträgt. Sie war, wie die Messungen der Temperatur und des Salzgehaltes im fortlaufenden einstündigen Intervall zeigen (siehe Abb. 5), der Sitz von ausgesprochenen internen Wellen von halbmondtägiger Periode, die mit einer mittleren vertikalen Verlagerung der Wassermassen von rund $7^1/_2$ m verknüpft waren. Besonders deutlich erkennt man aus Abb. 5, wie sowohl in der Deckschichte (Temperaturkurven in 0 und 50 m) wie in der Unterschicht (Temperaturkurven in 150 und 200 m) die Temperatur weitgehend konstant bleibt (0 m hat einen kleinen täglichen Temperaturgang), während in 100 m Tiefe in unmittelbarer Nähe der Sprungschichtmitte beim Vorübergang der Welle sie um mehr als 2° schwankt. Die in der Abb. 5 in der 100 und 125 m-Kurve gestrichelt eingetragenen Kurven geben die harmonische Analyse der Beobachtungskurven und zeigen, wie sich diese Werte schon durch eine einzige Welle mit der Periode von 12,3 Mondstunden (halber Mondtag) recht gut wiedergeben lassen.

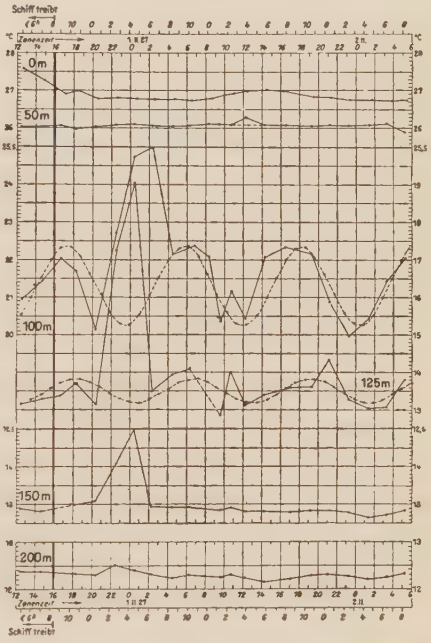


Abb. 5. Änderung der Temperatur in verschiedenen Tiefenhorizonten auf der Ankerstation 254 vom 31. Jänner, 12 Uhr, bis 2. Februar, 6 Uhr, nach den Serienmessungen in einstündigem Intervall.

Neben dieser ausgesprochenen internen Gezeitenwelle enthalten die Beobachtungen noch eine große Störung, die auf die Zeit um Mitternacht des 31. Jänner auf den 1. Februar fällt. Während in der Deckschicht keine Spur dieser Störung zu sehen ist, umfaßt sie die ganze Sprungschichte mit besonderer Stärke in ihrem oberen Teil; in 200 m Tiefe merkt man nur andeutungsweise durch eine kleine Erhöhung der Temperatur und eine kleine Erniedrigung des Salzgehaltes, daß die Störung gerade noch das 200 m-Niveau etwas überschritten hat. Bei Kenntnis des mittleren vertikalen Aufbaues der Wassermassen an der Station (siehe Abb. 4) läßt sich unter plausiblen Annahmen berechnen, aus welchen Tiefen die Wassermassen stammen müssen, um in jedem Niveau die beobachteten Störungen hervorzurufen. Diese Werte ermöglichen es, sich ein Bild des Stromvorganges zu konstruieren, durch den die Störung im thermohalinen Aufbau erzwungen wurde. Dabei muß man sich das Zeitlichnacheinander durch ein Zeitlichnebeneinander ersetzt denken. Abb. 6

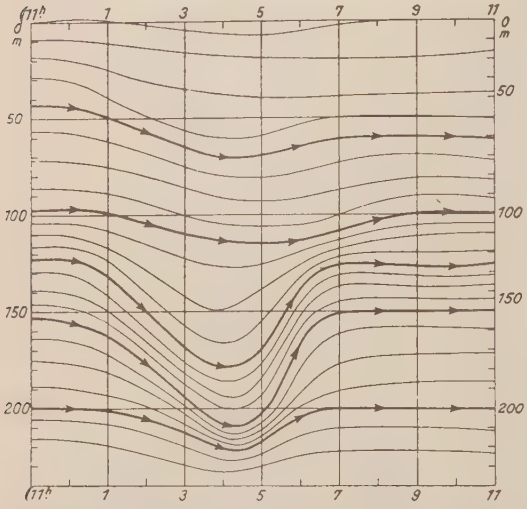


Abb. 6. Stromlinien der Störung auf der Ankerstation 254 (die stärker ausgezogenen Linien gehören zu den Strombahnen von Wasserteilchen in den mittleren Tiefen von 50, 100, 125, 150 und 200 m Tiefe).

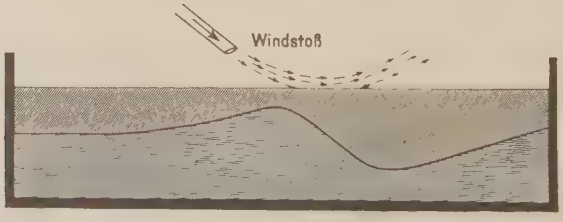


Abb. 7. Unterwasserwelle, hervorgerufen durch einen Windstoß (Böe). (Nach J. SANDSTRÖM.)

gibt die Stromlinien dieser Störung, durch die ein klares Bild der zeitlichen Wasserversetzung beim Durchgang der Störung vermittelt wird. Der Verlauf der Störung hat eine auffallende Ähnlichkeit mit der Form jener Störungen, die J. SANDSTRÖM [*13*] experimentell im geschichteten Wasser dadurch erzielte, daß er stoßweise sozusagen eine Windböe auf die Wasseroberfläche wirken ließ (Abb. 7). Es ist nicht zu bezweifeln,

daß auch auf der Ankerstation 254 durch irgend welche äußere Störung (Böe) eine solche Unterwasserwelle irgendwo in der Umgebung der Station erzeugt wurde, die dann längs der Sprungschichte weiterwanderte und zufällig durch die Serienmessungen erfaßt wurde. Woher die Störung kam und in welche Richtung sie abzog, läßt sich aus den Beobachtungen an einer Station allein nicht entscheiden; es mag aber geraume Zeit vergehen, bis neuerlich eine solche Erscheinung in einem solchen Ausmaß zufällig zur Beobachtung gelangt.

Der im folgenden besprochene Fall führt zu einer auffallenden Erscheinung, auf die etwas näher eingegangen werden soll. Die Ankerstation 369 der ersten Teilfahrt der Nordatlantischen Expedition des „Meteor“ (19° 40′ N, 18° 4′ W, Tiefe 2140 m, 19. bis 21. April 1937, 52 Wiederholungsserien bis 200 m in einstündigem Intervall) liegt vor dem Afrikanischen Schelf bei Kap Blanco im Meeresgebiet zwischen den Kap Verdeschen und den Kanarischen Inseln. In der Tiefenschichte zwischen 30 und 60 m befand sich dort eine gut ausgesprochene Sprungschicht der Temperatur und des Salzgehaltes und die 52 stündigen Messungen ergaben kräftige interne Wellen Gezeitencharakters, die sich besonders gut in einem Auf- und Abwogen der Isothermen äußerten. Die Abb. 8 gibt eine Isothermendarstellung für den ganzen Zeitraum. Man erkennt deutlich periodische Verlagerungen der Isothermen in der ganzen Schichte bis 250 m Tiefe im Takte einer halbmondtägigen Gezeitenwelle. Um diese Wiederholungen besser hervortreten zu lassen, sind Hochlagen der Isothermen jeweils durch eine dicke ausgezogene Linie, Tieflagen durch entsprechende gestrichelte Linien verbunden worden. Neben der halbmondtägigen Welle scheinen im zweiten Teil des Zeitraumes, besonders im Bereich der maximalen Sprungschicht noch eine kleinere Periode überlagert zu sein, mit der wir uns hier nicht weiter befassen wollen. Ich möchte vielmehr auf eine *unsymmetrische Ausbildung* des Isothermenverlaufes aufmerksam machen, die mit dem Durchgang der großen internen Welle verbunden ist. Es zeigt sich, daß im allgemeinen

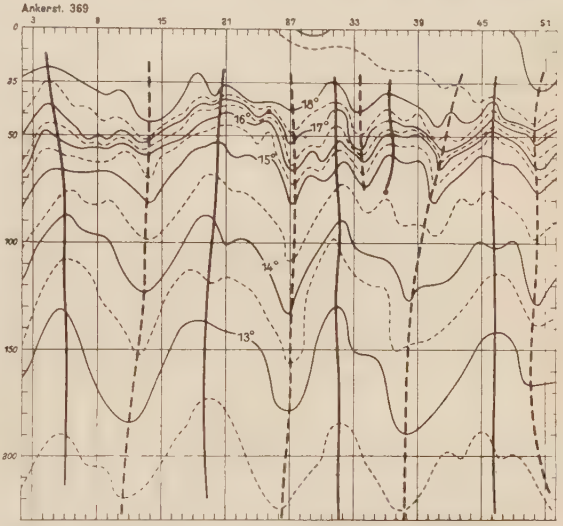


Abb. 8. Ankerstation 369 der 1. Teilfahrt der nordatlantischen Expedition des „Meteor“ (19° 40′ N, 18° 4′ W, 19. bis 21. April 1937, 52 Wiederholungsserien in einstündigem Intervall): Isothermenverlauf bis 230 m Tiefe.

der Abfall der Isothermen *langsamer* erfolgt als der Anstieg zu einer Hochlage. Dies tritt besonders deutlich hervor, wenn man Schichtenmittel bildet, wie sie in Abb. 9 zur Darstellung gebracht sind. Der An-

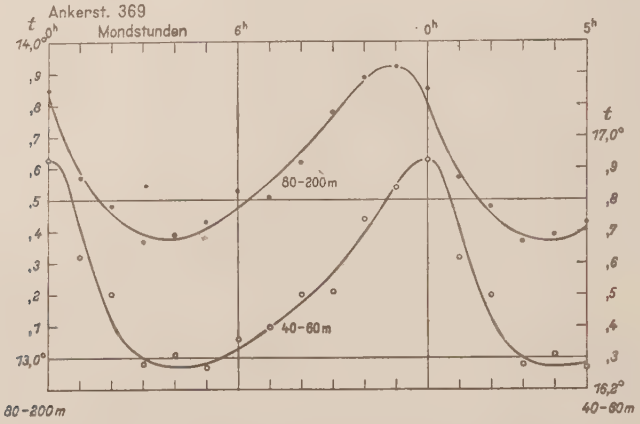


Abb. 9. Schichtenmittel der Temperatur für eine halbmondtägige Periode, und zwar für die Schicht 40 bis 60 m und 80 bis 200 m auf der „Meteor"-Ankerstation 369.

stieg der Temperatur vom Minimum zum Maximum erfolgt in 7,2 bzw. in 8 Stunden, der Abfall in 4,8 bzw. 4 Stunden. Dabei sind die Minima flach und ausgedehnt, die Maxima spitz und steil. Es sieht in Abb. 9 so aus, als ob im Bereich der maximalen Ausbildung der Sprungschichte (40 bis 60 m) die Asymmetrie stärker entwickelt wäre wie in den tieferen Schichten. Will man vom Verlauf der Temperatur an einem festen Punkt auf die zeitlichen Verlagerungen der Wassermassen schließen, so ist zu beachten, daß einem Anstieg der Temperatur ein Absinken der Sprungschichte, einem Abfall der Temperatur eine Aufwärtsbewegung derselben entspricht. Der Sprungschichtenverlauf ist demnach wie in Abb. 10a gestaltet. Bei Wellenbewegungen ist im allgemeinen erlaubt, vom Zeitlichnacheinander der Erscheinungen an einem Ort auf das Nebeneinander im Raum zu schließen. Man erhält dann eine ungefähre Vorstellung der Form des *Wellenprofils beim Vorübergang der internen Welle* am Ort der Messungen. Die Form der Welle ist dann die in Abb. 10b gegebene: *Ein sanfter Anstieg vom Wellental zum Wellenberg, ein steiler Abfall vom Wellenberg zum Wellental.* Dieses asymmetrische Wellen-

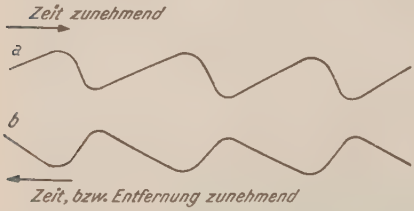


Abb. 10. a) Zeitlicher Verlauf der Höhenlage der Sprungschicht an einem festen Ort (wie bei einer Registrierung!). b) Zeitlicher Verlauf derselben Erscheinung nacheinander an einem festen Ort bzw. Form des Wellenprofils einer degenerierten internen Welle.

profil deutet auf eine *Degeneration* der internen Welle hin, wie man sie z. B. bei gewöhnlichen Oberflächenwellen des Meeres vor dem Umkippen bei der Brandung sieht. Man muß deshalb wohl annehmen, daß es auch bei internen Wellen zu Degenerationserscheinungen des Wellenprofils kommen kann, die schließlich zu internen *Brandungsprozessen* führen müssen. Dabei darf man sich aber nicht vorstellen, daß diese inneren Brandungen mit jener Vehemenz und Schnelligkeit sich abspielen wie etwa das Brandungsphänomen bei Oberflächenwellen. Diese inneren Brandungen gehen entsprechend der geringen Fortpflanzungsgeschwindigkeit interner Wellen äußerst langsam vor sich, etwa so, wie wenn man eine brandende Oberflächenwelle kinematographisch in der Zeitlupe betrachten

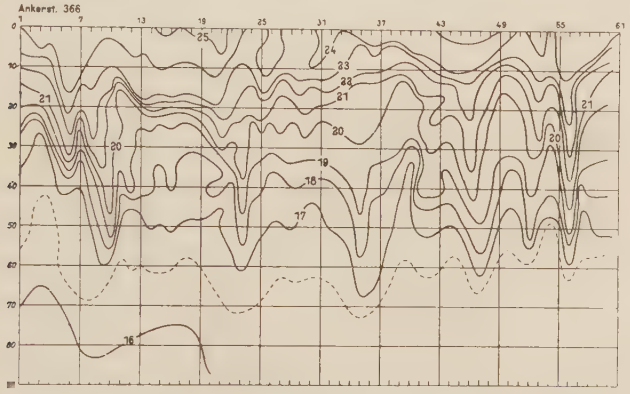


Abb. 11. Isothermenverlauf auf der Ankerstation 366 (10° 16′ N, 16° 38′ W, 13. bis 16. April 1937, 60 Wiederholungsserien bis 80 m Tiefe in einstündigem Intervall).

würde. Auch bei Laboratoriumsversuchen im Trog kann man bei zweifach geschichteten Medien solche innere Brandungen hervorrufen, die so langsam ablaufen, daß man den Vorgang gut verfolgen kann.[1] Dabei ist es sehr merkwürdig zu sehen, wie trotz des sehr turbulenten Brandungsprozesses an der Grenzfläche die Oberfläche in völliger Ruhe verharrt, wie wenn sich innerhalb der Wassermasse nichts ereignen würde. Ganz ähnlich müssen sich die Vorgänge bei einer in der Tiefe brandenden inneren Gezeitenwelle abspielen.

Ich will noch weitere Beispiele für diese sehr interessante Erscheinung vorführen: sie zeigen, daß der Brandungsvorgang bei inneren Gezeitenwellen scheinbar nichts Ungewöhnliches ist. Der eine Fall betrifft die internen Wellen der „Meteor"-Ankerstation 366 (10° 16′ N, 16° 38′ W v. Gr., 13. bis 16. April 1937, 60 Wiederholungsserien in einstündigem Intervall), die etwas südwestlich der Bissagos-Inseln auf dem ausgedehnten westafrikanischen Schelf in ziemlicher Landnähe ausgeführt wurde. Abb. 11 gibt wieder die Isothermendarstellung von Grad zu Grad für

[1] Eine Photographie einer solchen inneren Brandung ist in der Arbeit in Anmerkung 1, S. 43 zu finden.

den ganzen Zeitraum von vollen fünf Perioden der halbmondtägigen Gezeit. Auch hier erkennt man wieder die starken Schwankungen in der Höhenlage der Isothermen, die in etwa 30 m Tiefe am stärksten geschaart sind, da die Sprungschicht der Dichte in dieser Tiefe im Mittel lagert. Wieder zeigt sich trotz der zahlreichen kleinen Störungen, die den Kurvenverlauf recht unruhig gestalten, eine deutliche Asymmetrie der großen Wellenperiode. Noch besser erscheint diese in der Abb. 12. In dieser sind alle fünf Wellenperioden zu einem Mittel vereinigt, wodurch die kleinen Störungen eliminiert wurden. Neben der Asymmetrie, die hier noch stärker ausgebildet erscheint als im früheren Fall der Anker-

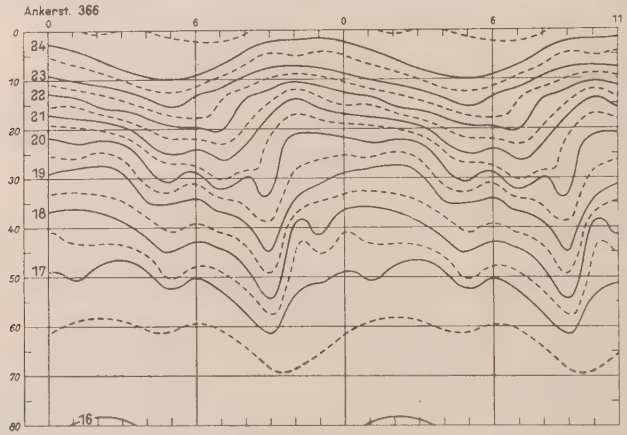


Abb. 12. Mittlerer Isothermenverlauf während zweier halbmondtägiger Perioden auf der „Meteor"-Ankerstation 366 (Mittel von fünf vollen Perioden, Isothermen von einem halben zu einem halben Grad).

station 369, erkennt man, daß eine deutliche Verschiebung der Extreme mit der Tiefe vorhanden ist; in der Tiefe verspätet sich die innere Welle in ihren Extremen immer mehr; besonders im Maximum (Höhenlage der Sprungschichte) beträgt die Verspätung mehrere Stunden. Auch diese auffallende *Phasenverschiebung der Welle mit der Tiefe* ist eine Erscheinung, die notwendig an die Erscheinung der inneren Brandung geknüpft ist.

Eine noch weitere Steigerung der Asymmetrie einer inneren Gezeitenwelle zeigt der folgende Fall. Er betrifft wieder die Straße von Gibraltar. Die Messungen sind ungefähr an derselben Stelle wie im früher behandelten Fall (siehe S. 46) ausgeführt worden, diesmal aber zur Zeit von *Springhochwasser*; sie sind von J. P. Jacobsen und Helge Thomson [*12*] teilweise bearbeitet worden: „Dana"-Ankerstation 35° 57,5′ N, 5° 21′ W, vom 14. April 5 Uhr 05 Min. bis 15. April 5 Uhr 12 Min. 1928, 23 Wiederholungsserien in nahezu einstündigem Intervall. Die Abb. 13 die gleicher Art wie die Abb. 3 ist, gibt für die ganze Beobachtungszeit den Verlauf der Dichte (kg/cbm) bis 300 m Tiefe: darunter steht wieder die gleichzeitige

Wasserstandskurve von Cadix und der Gesamtstrom (Grundstrom + + Gezeitenstrom) für die Mitte der Meeresstraße. Die mit den Gezeiten der Meeresoberfläche gekoppelte interne Welle ist hier völlig degeneriert und der eine Wellenast steht nahezu senkrecht. Es kommt sogar in der Schicht zwischen etwa 70 bis 150 m fast zum Umkippen der Welle; zwar sind im allgemeinen die unteren Schichten noch dichter, also schwerer als die oberen, aber es finden sich in zwei Messungsreihen einige Werte, die deutlich eine *Instabilität der Schichtung* aufweisen. Die innere Gezeitenwelle ist in diesem Fall

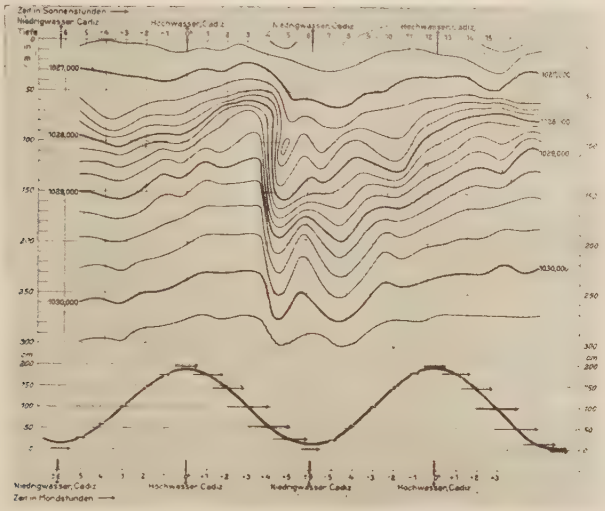


Abb. 13. „Dana"-Ankerstation in 35° 57,5′ N, 5° 21′ W, 14., 5 Uhr 05 Min., bis 15. Juli 1928, 5 Uhr 12 Min.: Linien gleicher Dichte (kg/cbm). Darunter die Gezeitenkurve von Cadix für dieselbe Zeit. Die Pfeile geben Richtung und Stärke der Gesamtströmung (Grundstrom + Gezeitenstrom) in den oberen Schichten für die Mitte der Meeresstraße.

nahe an dem Moment des Überkippens herangekommen, stellt somit einen unstabilen Zustand dar. Ohne Zweifel sind die an Springhochwasser geknüpften starken Gezeitenströme in Verbindung mit den in der Straße vorhandenen, oft recht intensiven oberen und unteren Grundströmen die äußere Ursache, daß zu dieser Zeit die innere Gezeitenwelle, die sonst ruhig abläuft und regelmäßig gestaltet ist, zu so starker Degeneration neigt; dies führt schließlich zu inneren Brandungen. Die Form dieser Brandungsprozesse muß, wie man aus der Abb. 13 entnehmen kann, große Ähnlichkeit mit einer *internen Bore* haben. Diese interne Bore durchwandert wahrscheinlich die ganze Länge der Meeresstraße und verliert sich dann im angrenzenden Meer größerer Tiefe, wo sich auch die in der Meeresstraße gut entwickelte Sprungschichte der Dichte in eine mehr stetige Dichtezunahme mit der Tiefe auflöst.

Ein weiterer interessanter Fall betrifft die Straße von Messina. Der kleinste Querschnitt der Meeresstraße liegt im nördlichen Teil derselben, im Profil Punta Pezzo—Ganzirri; er hat eine Breite von weniger als 4 km und eine fast rechteckige Querschnittsfläche von nur $^1/_3$ qkm, mit einer mittleren Tiefe von 80 m. Von dieser Schwelle senkt sich der Meeresboden nach Süden und Nordosten ziemlich gleichförmig, aber nach Süden rascher als nach Nordosten, so daß im Norden ein Stück der Meeresstraße von etwa 7 km Länge Querschnitte aufweist, die immer unter $^1/_2$ qkm bleiben. Dieser Teil der Meeresstraße ist der Schauplatz recht turbulenter Gezeitenvorgänge, die unter den Namen Scylla und Charybdis bekannt sind [*14*]. Normalerweise liegen in der Meeresstraße in den unteren Schichten (unterhalb etwa 30 m Tiefe) schwerere Wassermassen des Jonischen Meeres, darüber die leichteren des Tyrrhenischen

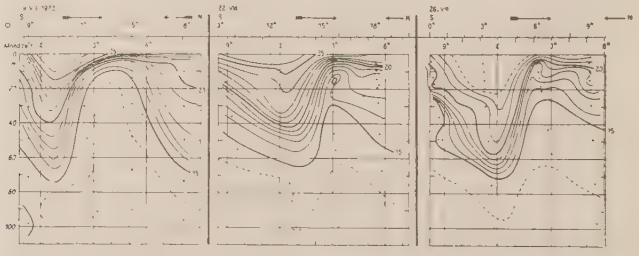


Abb. 14. Ankerstation der R. N. „Marsigli" in der Straße von Messina auf dem Querschnitt Punta Pezzo—Ganzirri auf 106 m Tiefe: Isothermenverlauf in verschiedenen Tiefen für den 19., 22. und 26. August 1922 für die Zeit etwa 9 bis 12 Uhr Mondzeit. Die Pfeile darüber geben die Richtung und Stärke des Stromes (Grundstrom + Gezeitenstrom) zu den entsprechenden Zeiten an der Ankerstation wieder.

Meeres. Diese bewegen sich nach Süden, erstere nach Norden, und diese Grundstromverteilung entspricht den Dichteunterschieden der Wassermassen der angrenzenden Meere. Die Grenzfläche innerhalb der Meeresstraße vollführt nun im Takte der halbmonatlichen Gezeitenperiode große Schwankungen, die natürlich mit dem ganzen Gezeitenphänomen der Meeresstraße eng verknüpft sind. Infolge der Enge der Meeresstraße und der geringen Mächtigkeit der übereinander gelagerten Wasserschichte verschiedener Dichte nehmen diese inneren Gezeitenwellen hier eine wesentlich turbulentere Form an als z. B. in der Straße von Gibraltar. Die Störungen erreichen hier die Meeresoberfläche und erzeugen ausgedehnte Wirbel horizontaler Achse, die zu inneren Brandungserscheinungen führen. Durch Verlagerung der sonst in der Vertikalen übereinanderliegenden Wassermassen in Schichten nebeneinander kommt es aber bei größerer Intensität der Störung auch zu jenen großen zyklonischen und antizyklonischen Wirbeln vertikaler Achse, die bei der Scylla und Charybdis das Charakteristische sind. Der Zusammenhang dieser Erscheinungen mit dem Ablauf der Gezeit in der Straße ist in der zitierten Arbeit geklärt worden.

Auf einer 15tägigen Ankerstation, die das Forschungsschiff „Marsigli" auf einer von F. Vercelli geleiteten Aufnahme der Stromverhältnisse und des ozeanischen Aufbaues der Wassermassen der Meeresstraße durchgeführt hat [*15*], sind neben Strommessungen auch Temperatur- und Salzgehaltsbestimmungen in den verschiedenen Tiefen bis zum Meeresboden in etwa einstündigem Intervall vorgenommen worden. Sie unterrichten uns über die außerordentlich großen Temperatur- und Salzgehaltsänderungen, die an dieser engsten Stelle der Meeresstraße beim Ablauf der Gezeit auftreten. Sie sind nicht anders zu deuten, als durch den Durchgang mächtiger interner Gezeitenwellen. Der vertikale thermische und haline Aufbau der Wassersäule ändert sich von Stunde zu Stunde manchmal um so hohe Beträge, daß man zweifelt, ob die Beobachtungen jeweils zu ein und derselben Vertikalen gehören. Unbedingte gleichzeitige Serienmessungen wären hier erforderlich. Oft treten *Instabilitäten* auf, die sicherlich zu internen Brandungserscheinungen gehören. Ich habe in Abb. 14 drei Fälle solcher starker Temperaturänderungen in graphischen Darstellungen zusammengefaßt, die sogleich augenscheinlich die *interne Bore* zeigen. Stets zwischen 2 und 3 Uhr Mondzeit dringt von Süden gegen Norden schweres, aber wärmeres Wasser durch die Meeresstraße in Form einer *Kopfwelle* vor. Das Vordringen erfolgt oft so rasch, daß am Kopf der vordringenden Wassermasse der Aufbau instabil wird, wie es im ersten und zweiten Fall der Abb. 14 ist. Es ist sehr charakteristisch, daß gerade nur zu dieser Phase der internen Gezeitenwelle Instabilitäten sich einstellen, nie aber zu der um 180° verschiedenen (8 bis 9 Uhr Mondzeit). Diese Verhältnisse sind in Abb. 15 schematisch in einem Längsschnitt durch die Meeresstraße zur Darstellung gebracht. Man erkennt, daß hier die interne Gezeitenwelle namentlich zur Zeit der Springtide fast den Charakter einer Welle verloren hat und durchaus die Form einer Bore annimmt. Zur Mondzeit 2 bis 3 Uhr hat der Vorgang, meteorologisch gesprochen, den Charakter einer „Kaltfront", zwischen 8 und 9 Uhr Mondzeit jenen einer „Warmfront" mit allen jenen Übergängen und Wirbelbildungen, die hier wie dort zur Ausbildung gelangen können.

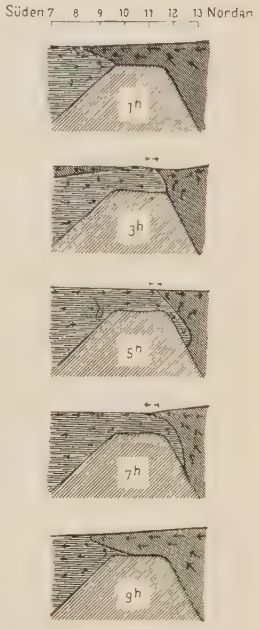


Abb. 15. Schematische Darstellung der Lage der beiden Wassermassen auf einem Längsschnitt durch die Straße von Messina während des Ablaufes der Gezeit in ihr.

Nach Vorführung all dieser Fälle besteht wohl kein Zweifel, daß die internen Gezeitenwellen einmal erregt, bei weiterer Ausbreitung unter bestimmten Bedingungen degenerieren und Profiländerungen erleiden. Es erhebt sich nun die Frage, was für Gründe sich anführen

lassen, die den im allgemeinen so friedlich sich abspielenden Vorgang der internen Wellen bis zum turbulenten Prozeß der inneren Brandung steigern lassen. Zunächst möchte ich darauf hinweisen, daß wir auch über die Gründe der Entstehung interner Wellen und ihrer Koppelung mit der allgemeinen Erscheinung der ozeanischen Gezeiten nur sehr mangelhaft informiert sind. Da ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit vielmals geringer als die der Gezeitenwellen an der Meeresoberfläche ist, ist leicht einzusehen, daß sich bald bedeutende Phasenverschiebungen zwischen diesen beiden Arten von Gezeitenwellen einstellen werden, so daß im allgemeinen ein einmal bestehender Zusammenhang zwischen ihnen bald verlorengehen muß. Er wäre vielleicht nur in unmittelbarer Nähe des Entstehungsortes der Wellen nachzuweisen; da man aber nicht weiß, wo diese Orte gelegen sind, lassen sich schwer aus den Beobachtungen irgend welche Schlüsse ziehen. Nur soviel scheint festzustehen, daß die internen Wellen von Gezeitendimensionen einer sehr starken Dämpfung unterliegen und daß ihre Amplituden deshalb bei ihrer Ausbreitung nach allen Richtungen rasch abnehmen müssen.[1] Aus zahlreichen, sehr interessanten Versuchen, die N. ZEILON [*16*] im Laboratorium durchgeführt hat, läßt sich durch Analogieschlüsse annehmen, daß die internen Wellen am Schelfrand durch die auf kurzer Strecke stattfindende Verkleinerung der Wassertiefe erregt werden und nun längs der Sprungschichte auf dem Schelf gegen den Kontinent wandern. Man könnte zunächst daran denken, daß es sich bei der dabei erfolgenden Degeneration des Wellenprofils einer solchen internen Welle um einen ähnlichen Vorgang handelt, wie man ihn an den gewöhnlichen kurzen Oberflächenwellen des Meeres sieht. Wenn die Amplitude einer solchen Oberflächenwelle größer wird und nicht mehr klein gegen die mittlere Tiefe des Wassers angesehen werden kann, dann erfolgt die Fortpflanzung nicht mehr ohne Gestaltänderung. Wie die Beobachtungen lehren, werden dann die Neigungen im Wellenprofil an der Vorderseite immer steiler, die an der Rückseite sanfter, das Wellenprofil wird asymmetrisch. Auch auf theoretischem Wege läßt sich dieser Vorgang verfolgen. Bis vor kurzem konnte man die entsprechenden aufeinander folgenden Wellenprofile nur durch schrittweise Annäherung berechnen. J. E. FJEDSTAD ist es gelungen, für diese Profiländerungen eine geschlossene mathematische Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen zu geben. Die einzige Vereinfachung, die hierbei notwendig war, betrifft die Vernachlässigung der vertikalen Beschleunigung der Wasserteilchen in ihrer Orbitalbahn, so daß an Stelle des dynamischen Druckes der statische gesetzt werden kann. Hingegen wurde die Nichtlinearität der Differentialgleichungen voll berücksichtigt. Die Lösung gelang sowohl aus den Eulerschen wie auch Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung [*17*]. Die gewonnenen Wellenprofile zeigen deutlich, daß im Fortschreiten der Welle die Asymmetrie des Profils immer zunimmt, bis ein Zustand erreicht wird, bei dem die

[1] Siehe V. W. EKMAN bei der Diskussion auf dem Annual meeting of intern. council for the exploration of the sea. Kopenhagen 1931.

Voraussetzungen der Theorie nicht mehr erfüllt sind. Die Beobachtungen zeigen dann, was geschieht. Die Kämme überstürzen sich und brechen.

Auch die internen Gezeitenwellen werden unter ähnlichen Bedingungen die Neigung haben, bei Steigerung ihrer Amplitude und bei abnehmender Mächtigkeit der übereinander lagernden Wasserschichten ihre Wellenprofile zu verändern. Einige Fälle, in denen diese asymmetrischen Profile zur Beobachtung gelangten, zeigen große Amplituden, wie dies allerdings bei internen Wellen meistens auch sonst der Fall ist, und außerdem war an dem Beobachtungsort die Wassertiefe nicht groß, da diese Stationen auf dem Schelf lagen. Ohne Zweifel werden beide Umstände dazu beitragen, eine Asymmetrie der Wellenprofile zu erzwingen.

Aber es gibt auch Fälle, in denen diese Umstände sichtlich nicht ausreichen, um die inneren Brandungen verständlich zu machen. Es kommt noch hinzu, daß die *Seichtwasserwellen* auch bei relativ geringer Wassertiefe permanente Wellenprofile zeigen, die auch bei abnehmender Wassertiefe zu keiner Degeneration neigen, außer wenn die Wassertiefe sehr klein wird und die Wellen direkt auf das Ufer auflaufen. Es könnte der Fall sein, daß die internen Gezeitenwellen vom Charakter solcher Seichtwasserwellen sind. Dann müßte die auftretende Instabilität auf andere Ursachen zurückgeführt werden.

Die Umstände, unter denen interne Wellen auftreten, lassen die Möglichkeit der Ausbildung von *dynamischer Instabilität* ohneweiters zu. Es genügt zur Erläuterung dieser Verhältnisse, hier folgenden einfachen Fall zu betrachten: Zwei Wasserschichten großer Mächtigkeit lagern übereinander. Die obere Wassermasse habe die Dichte ϱ_2 und bewege sich mit der Geschwindigkeit u_2, die untere Wassermasse habe die Dichte ϱ_1 und bewege sich mit der Geschwindigkeit u_1. Die Theorie [*18*] ergibt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit interner Wellen an der Diskontinuitätsfläche zwischen beiden Medien in diesem Falle gegeben ist durch:

$$c = \frac{\varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{\varkappa}\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} - \varrho_1 \varrho_2 \left(\frac{u_2 - u_1}{\varrho_1 + \varrho_2}\right)^2}.$$

Der erste Ausdruck rechts stellt die *konvektive* Geschwindigkeit dar und ist eine Art Mittelwert der beiden Geschwindigkeiten, mit denen sich die beiden Wassermassen bewegen. Gegenüber dieser mittleren Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit von Wellen der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa}$$

durch den Wurzelausdruck rechts gegeben. Das erste Glied unter dieser Wurzel gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der internen Wellen im *ruhenden System* (siehe S. 42), also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit *reiner Schwerewellen*. Das zweite Glied mit dem negativen Vorzeichen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit *reiner Trägheitswellen*. Das Schwerewellenglied ist immer positiv, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$ ist, d. h. wenn das schwerere Wasser unter dem leichteren gelagert ist. In der Natur ist dies immer

der Fall. Reine Schwerewellen sind deshalb immer stabil. Das Trägheitswellenglied ist dagegen immer negativ; es wirkt also stets labilisierend und schwächt so die statische Stabilität der Schwerewellen. Diese Schwächung kann aber soweit gehen, daß es zu einer *dynamischen Instabilität* kommt. Dies tritt ein, wenn

$$(u_2 - u_1)^2 > \frac{g}{\varkappa} \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1 \varrho_2},$$

d. h., wenn Wellenlänge und Dichtesprung an der Diskontinuität gegeben sind, bei genügend großem Geschwindigkeitssprung an der Grenzfläche zwischen den beiden Medien.

In den von uns betrachteten Fällen sind die Mächtigkeiten der beiden Wassermassen klein, und dies hat eine weitere Herabsetzung des Ausdruckes rechts vom Ungleichheitszeichen in obiger Beziehung zur Folge. Sind h_1 und h_2 die Dicken der unteren und oberen Wasserschichte, so erhält man die Ungleichung in der Form:

$$(u_2 - u_1)^2 > \frac{g}{\varkappa} (\varrho_1 - \varrho_2) \left[\frac{1}{\varrho_1 \operatorname{ctgh} \varkappa h_1} + \frac{1}{\varrho_2 \operatorname{ctgh} \varkappa h_2} \right].$$

Vereinfachen wir auch diesen Fall in der Weise, daß $h_1 = h_2 = h$ angenommen wird und bedenken wir, daß $\varkappa h$ eine sehr kleine Größe ist, so kann man mit völlig genügender Genauigkeit $\frac{1}{\operatorname{ctgh} \varkappa h} = \operatorname{tgh} \varkappa h = \varkappa h$ selbst setzen und aus der Ungleichung wird

$$u_2 - u_1 > \sqrt{g h \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1 \varrho_2}}.$$

Mit dieser Ungleichung läßt sich folgende kleine Tabelle aufstellen, die für verschiedene Werte des Dichteunterschiedes $\varrho_1 - \varrho_2$ und der Schichtendicke h die Geschwindigkeitsdifferenz angibt, die überschritten werden muß, damit dynamische Instabilität der internen Gezeitenwellen eintritt.

Die Geschwindigkeitsdifferenz (cm/sec) muß größer sein als:

$\varrho_1 - \varrho_2$	10^{-4}	5×10^{-4}	10^{-3}
$h = 150$ m	52	117	166
100 m	47	96	135
50 m	30	68	96
25 m	20	48	68

Aus diesen Werten ersieht man, daß schon relativ kleine Geschwindigkeitsunterschiede der Ströme in den beiden übereinander gelagerten Wasserschichten ausreichen, um eine Instabilität der internen Gezeitenwellen hervorzurufen, die notwendigerweise dann zu einer inneren Brandung führen muß. Da die Grundströme in Meeresstraßen stets so gestaltet sind, daß sie in den beiden übereinander gelagerten Wassermassen entgegengesetzter Richtung sind (Ausgleichsströme zwischen den Meeren,

die die Straße miteinander verbindet), muß in diesen die Neigung der an der Grenzfläche auftretenden internen Gezeitenwellen zu degenerieren und es zu einer inneren Brandung kommen zu lassen, besonders groß sein. Das ist auch in der Straße von Gibraltar und besonders in der Straße von Messina, wie wir gesehen haben, der Fall.

V. Bjerknes hat für andere Zwecke die Wellenform und die Stromlinien für solche instabile interne Wellen berechnet, und in Abb. 16 sind zwei solche Fälle wiedergegeben. Bei der oberen Welle haben beide Wassermassen eine gleichgerichtete Translationsgeschwindigkeit (Grundstrom), bei der unteren sind die Grundströme entgegengesetzt gerichtet; in beiden ist die Geschwindigkeit der oberen Wassermasse die größere, wie es auch meistens in der Natur der Fall ist. Man erkennt sofort, daß hier Fälle der *Asymmetrie des Wellenprofils* vorliegen, die an die bei den internen Gezeitenwellen gefundenen Formen erinnern. Man muß wohl bei der im Ozean fast stets vorhandenen Stromschichtung in den Wasserbewegungen annehmen, daß asymmetrische Formen der Wellenprofile auf dynamische Instabilitäten zurückzuführen sind. Natürlich sind es Zufälle, wenn man auf ozeanographischen Stationen gerade die Verhältnisse vor dem Umkippen der inneren Wellenfront erfaßt. Denn die Instabilitäten können sich nicht längere Zeit halten. Im weiteren Fortschreiten der Welle kommt es zu gewaltigen inneren Turbulenzprozessen. Bei der dynamischen Instabilität rollt sich schließlich im Verlauf des Vorganges die Grenzschichte in Wirbel gleichen Vorzeichens auf, die sich zwischen den beiden ungleich bewegten Schichten legen. Abb. 17 soll eine Vorstellung von der fortschreitenden Veränderung geben, die eine instabile Welle durchmacht.[1] Das Endergebnis ist sicherlich,

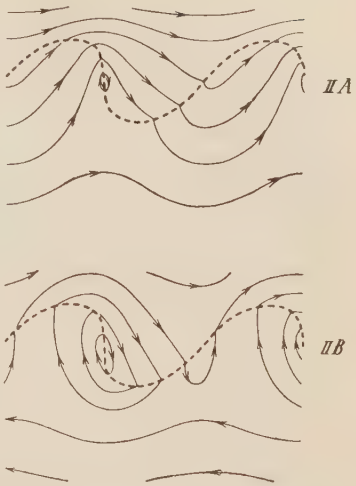


Abb. 16. Wellenprofile und Stromlinien bei dynamisch instabilen internen Wellen. (Nach V. Bjerknes.)
II A: Obere und untere Strömung gleichgerichtet. II B: Obere und untere Strömung entgegengerichtet. Man vergleiche hierzu die Abb. 1.

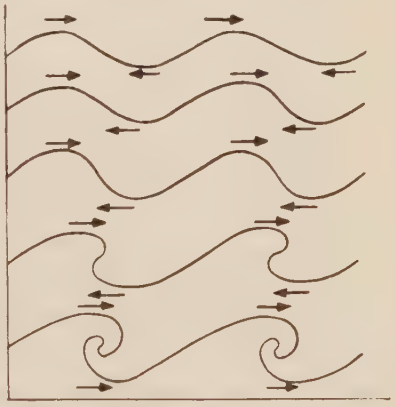


Abb. 17. Aufeinanderfolgende Wellenprofile dynamisch instabiler Wellen. (Nach L. Rosenhead.)

[1] Siehe L. Rosenhead: The formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. Roy. Soc. A. **134**, 170.

daß durch fortgesetzte Verwirbelung sich eine *Mischungsschicht* bildet, in der sich ein mehr oder minder stetiger Übergang der Dichte und der Geschwindigkeitswerte von der unteren zur oberen Schichte einstellt. Daß Sprungschichten der Temperatur und des Salzgehaltes auf den Schelfen an Intensität rasch mit Annäherung an die Küsten abnehmen und in einem breiten Streifen vor der Küste zumeist fehlen, ist wohl darauf zurückzuführen, daß die inneren Gezeitenwellen mit Annäherung an die Küste bei immer geringer werdenden Wassertiefe so dynamisch instabil werden, daß sie die Auflösung jeder Sprungschichte erzwingen. Dieser Vorgang ist aber die Grundvoraussetzung für die Ausbildung des so bedeutsamen Phänomens des kalten Auftriebwassers vor den Küsten.

Literaturverzeichnis.

1. Nansen, F.: The Norweg. North Polar Exped. Scient. Res. **V**, No. 15, London 1906.
2. Helland-Hansen, B. and F. Nansen: The Norwegian Sea. Norwegian Fishery and Marine Investigations. Report **2**, Nr. 1 (1909).
3. Publ. de Circonstance Nr. 47, Kopenhagen 1909; Strömstudier vid Östersjöns Portar. Svenska Hydr.-Biolog. Komm., Skrifter III. Siehe auch Zeilon, N.: The seiches of Gullmar Fjord. Svenska Hydr.-Biolog. Komm. Skrifter **V**. Göteborg 1912.
4. Helland-Hansen, B.: Physical oceanography and meteorology. Michael Sars North Atlantic Deep-Sea Exped. 1910. Scient. Res. **1** (1930).
5. Defant, A.: Die Gezeiten und inneren Gezeitenwellen des Atlantischen Ozeans. „Meteor"-Werk **VII/1**. Berlin 1932.
6. Lek, L.: Die Ergebnisse der Strom- und Serienmessungen. Snellius Exped. in the eastern part of the Netherlands-Indies 1929/30, **2**, Part **3** (1938).
7. Ekman, W. and B. Helland-Hansen: Measurement of ocean currents (Experiments in the North Atlantic). Kungl. fysiogr. Sällskapet i Lund Förh. **1**, Nr. 1 (1931).
8. Berichte über die Teilfahrten der Deutschen Nordatlantischen Expedition des „Meteor", Febr.—März 1937 und Jan.—Juli 1938. Beihefte der Ann. Hydr. u. mar. Met. **1937**, Sept. u. **1939** Jan.
9. Defant, A.: Die ozeanogr. Verhältnisse während der Ankerstation des „Altair" am Nordrand des Hauptstromstriches des Golfstromes nördlich der Azoren. Wiss. Erg. d. intern. Golfstromunternehmung 1938. 4. Lief. Beiheft der Ann. d. Hydr. u. mar. Met., Nov. 1940.
10. Fjeldstad, J. E.: Interne Wellen. Geofys. Publikasjoner **10**, Nr. 6. Oslo 1933.
11. Schmidt, Joh.: Introduction to the Oceanogr. Reports. The Danish „Dana" Exped. 1920/22, Nr. 1. Kopenhagen 1929. Siehe auch Joh. Schmidt: Oceanography of the Gibraltar Region. Nature (London) **109**, 45 (1922).
12. Jacobsen, J. P. and Helge Thomson: Periodical Variations in Temperature and Salinity in the straits of Gibraltar. J. Johnson Memorial Volume, Liverpool 1934.
13. Sandström, J.: Dynamische Versuche mit Meerwasser. Ann. Hydr. u. Met. **1908**, 9.

14. Defant, A.: Scylla und Charybdis und die Gezeitenströmungen in der Straße von Messina. Ann. Hydr. u. mar. Met. **1940**, 145. Siehe auch: Das Phänomen der Scylla und Charybdis in der Straße von Messina. Naturwiss. **1940**, 713.

15. Crociere per lo studio dei fenomini nello stretto di Messina (R. N. „Marsigli" 1922/23). Com. intern. del mediterraneo. Venezia 1925 u. 1926. — F. Vercelli: I: Il regime delle correnti delle acque nello stretto di Messina. — F. Vercelli e M. Picotti: II: Il regime fisico-chimico delle acque nello stretto di Messina.

16. Zeilon, N.: Experiments on boundary tides. Meddelanden från Göteborgs Oceanogr. Inst. Nr. 8. Göteborg 1934.

17. Fjeldstad, J. E.: Tidal waves of finite amplitude. Astrophysica Norvegica **3**, Nr. 10. Oslo 1941.

18. Lamb, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Aufl. 1931, § 268. Siehe auch V. Bjerknes u. Mitarb.: Phys. Hydrodynamik. S. 382. Berlin: Julius Springer 1933.

551.52

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik Wien.)

Über die Theorie des Wärmehaushaltes einer Schneedecke.

Von

H. Reuter.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Nach einer einleitenden Diskussion der im Vergleich zum strahlungsundurchlässigen Erdboden bei einer Schneedecke hervortretenden besonderen Merkmale wird im Abschnitt I im Anschluß an eine frühere Arbeit von mir das Problem der nächtlichen Abkühlung der Schneeoberfläche behandelt. Unter der Annahme einer konstanten effektiven Ausstrahlung würde sich dabei mit Verwendung der in der Literatur angegebenen Beträge der Wärmeleitfähigkeit im Schnee eine enorm große, weit außerhalb der Erfahrung liegende Abkühlung im Laufe einer Strahlungsnacht ergeben. Daraus wird der Schluß gezogen, daß die tatsächlich wirksame Wärmeleitung im Schnee in den obersten Schichten etwa das 7- bis 8fache der in der Literatur (u. a. von Abels auf Grund von Beobachtungen des täglichen Temperaturganges in einer Schneedecke) verzeichneten Beträge ausmachen muß. Als Erklärung hiefür kommt ein Austauschvorgang oder eine Konvektion der im Schnee geringerer Dichte enthaltenen Luftblasen in Frage. Im Abschnitt II wird die Temperaturverteilung einer Schneedecke berechnet, die sich bei konstant angenommener effektiver Ausstrahlung unter der Einwirkung einer eine gewisse Zeit lang gleichbleibender Sonneneinstrahlung einstellen mußte. Für diese kurzwellige Sonnenstrahlung ist Schnee strahlungsdurchlässig im Gegensatz zum Erdboden. Als besonderes Merkmal tritt in diesem Fall das Maximum der Temperatur nicht wie beim strahlungsundurchlässigen Erdboden an der Oberfläche, sondern einige Zentimeter tiefer auf. Es wird eine Formel für die Tiefe und den Betrag dieses Maximums abgeleitet. Die Diskussion der theoretischen Ergebnisse und ein Vergleich mit der tatsächlich in einer Schneedecke beobachteten Temperaturverteilung zeigt bezüglich der Tiefe des Temperaturmaximums eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis. Der Betrag des Temperaturmaximums ergibt sich aus der Theorie allerdings erst dann in der richtigen Größenordnung, wenn die wirksame Wärmeleitung wieder in den obersten Schichten 7- bis 8mal größer angesetzt wird.

Im Abschnitt III wird allgemein diejenige Temperaturverteilung in einem strahlungsdurchlässigen Medium mit dem (nicht selektiven) Absorptionskoeffizienten ν berechnet, die sich infolge periodischer Sonneneinstrahlung

ausbilden muß. Für $\nu = \infty$ ergibt die allgemeine Lösung dann als Spezialfall den strahlungsundurchlässigen Erdboden. Auch in diesem Fall einer periodischen Sonneneinstrahlung ist die effektive Ausstrahlung als konstant vorausgesetzt, besonders deswegen, um dadurch die Randbedingungen der Differentialgleichung der Wärmeleitung zu vereinfachen. Wie jedoch durch Literaturhinweise gezeigt werden kann, wird diese Annahme den tatsächlichen Verhältnissen noch weitgehend gerecht. Als Ergebnis erhalten wir für den Spezialfall des Erdbodens bei der jährlichen Periode eine Verspätung der Temperaturextreme um $1^1/_2$ Monate und eine Amplitude von 100°. Milankovitsch gibt dagegen im Handbuch der Klimatologie entsprechend 23 Tage und 53° auf Grund seiner Lösung des Problems an. Bei unserer Lösung ist dabei zu Frühlingsbeginn ein stationärer Zustand vorausgesetzt, welche Verhältnisse eingehend diskutiert werden. In der täglichen Periode sind die Unterschiede zwischen unseren Werten und denen von Milankovitsch nicht groß. Ein Vergleich mit den Bodenbeobachtungen der Temperatur in Tiflis zeigt, daß unsere Werte den Erfahrungstatsachen weitgehend gerecht werden. Die weitere Diskussion der aus der allgemeinen Gleichung für eine strahlungsdurchlässige Schneedecke folgenden Resultate ergibt die wichtigen Sätze:

1. *Bei dem jährlichen periodischen Temperaturgang ist unter normalen Verhältnissen die bekannte Poissonsche Formel für die Fortpflanzung von Temperaturwellen von der Oberfläche zur Tiefe auch bei einer Schneedecke anwendbar.*

2. *Bei der täglichen Periode dagegen ist die Poissonsche Formel nicht mehr anwendbar.*

Die unmittelbare Folgerung daraus ist, daß die in der Literatur u. a. von Abels aus dem täglichen Temperaturgang in einer Schneedecke nach der Poissonschen Formel berechneten Beträge der Wärmeleitfähigkeit unrichtig sind und einer Korrektur bedürfen.

Dabei zeigt es sich, daß die Verringerung der Amplitude mit der Tiefe beim Schnee größer ist als sich aus der Poissonschen Formel ergibt, während die Verzögerung der Phasenzeiten sich nicht in demselben Maße unterscheidet. Dadurch findet eine von Keränen besonders erwähnte Tatsache, daß nämlich die aus den Amplituden berechneten Koeffizienten der Wärmeleitung durchwegs kleiner sind als die aus der Verzögerung der Phasenzeiten sich ergebenden, hier ihre Erklärung.

Summary. After an introductary discussion of the particular features of surface layers of snow compared with the conditions existing in soil that is impervious to radiation, in chapter I — in addition to a former paper of mine — the problem of nocturnal cooling of the snow surface is dealt with. Presupposing a constant net loss of heat by radiation from the snow to the atmosphere (effective outgoing radiation) and employing the data put down in literature of the conductivity of heat in snow an enormously big amount of cooling of the snow surface far beyond experience would result in the course of one night. Hence the conclusion has been drawn that the transfer of heat in the highest layers of snow must make up about 7—8 times the figures put down in literature by Abels and others which are based on observations of the diurnal waves of temperature in snow layers. For this effect we assume an eddy conductivity, respectively a convection in highest layers of snow of less density.

In chapter II the distribution of temperature in snow is calculated presupposing a constant effective outgoing radiation and at the same time a

constant solar radiation. For that short-wave solar radiation snow is pervious in contrast to ground. A special feature in that case is that the maximum of temperature does not appear on the surface as it is in the case of soil being impervious to solar radiation, but some centimeters below it. A formula is derived for the depth and the amount of this maximum. The theoretical results compared with the observations in snow layers give a good agreement between theory and practice as to the depth of the maximum of temperature. However the amount of the maximum does not result in the right proportion unless the transfer of heat in the highest layers is again assumed 7—8 times as big.

In chapter III that distribution of temperature in a medium pervious to radiation is computed with the non selective coefficient of absorption ν which must appear in consequence of periodical solar radiation. Putting down in the thus derived formula the coefficient of absorption $\nu = \infty$ we obtain as a special case the result for soil. In this case too a constant effective outgoing radiation was assumed, especially with the intention to simplify the boundary condition of the equation of conduction of heat. In fact this assumption is not far from an agreement with experience and measurements of the effective radiation as is shown in literature. In the special case of soil we obtain as result in the annual period a retardation of the extremes of temperature on the surface of $1^1/_2$ months and an amplitude of 100 degrees in contrast to Milankovitsch who obtains respectively 23 days and 53 degrees as is put down in the Handbook of Climatology (Köppen-Geiger). Herewith a stationary state at the beginning of spring is assumed. In the diurnal period our results don't differ much from those of Milankovitsch. A comparison with the observations of the ground temperature in Tiflis shows that our values agree well with the empiric facts. The further discussion of the results of the general equation for snow layers shows the following important proposition:

1. *In the annual period under normal conditions the well known formula of Poisson for the transmission of waves of temperature from the surface to te depth may also be applied in snow.*

2. *In the diurnal period the formula of Poisson cannot be applied anymore.*

The immediate derivation is that the amount of the conductivity of heat in snow calculated by Abels and others after the formula of Poisson is incorrect. It is shown that in general the decrease of the amplitude in snow calculated with our formula will be greater than the amounts obtained by Poisson's formula. Thus the fact, especially mentioned by Keränen, that the coefficients of conductivity of heat in snow computed from the amplitude are always smaller than those resulting from the retardation of phases, finds its explanation.

Résumé. Après une discussion introductrice des caractéristiques particulières d'une couverture de neige comparées avec les conditions existantes dans le sol imperméable à la radiation, au chapitre I, comme suite à une étude précédente mienne, le problème du refroidissement nocturne de la surface de neige est traité. Présupposant un rayonnement effectif constant et en employant les données que l'on trouve dans la littérature sur la conductibilité de chaleur dans la neige un total énorme de refroidissement bien au-dessus de l'expérience résulterait dans le cours d'une nuit. De là a été tirée la conclusion que la conductibilité calorifique effective de la neige dans les couches supérieures doit être environ 7 à 8 fois les données que l'on trouve dans la

littérature par ABELS qui sont basées sur les observations du cours diurne de la température dans une couche de neige. Pour l'explication de cela nous supposons un procédé d'échange, respectivement une convection dans les couches supérieures de neige d'une densité plus petite.

Au chapitre II la distribution de température dans la neige est calculée présupposant un rayonnement effectif constant et en même temps une radiation solaire constante. Pour cette radiation solaire à ondes courtes la neige est perméable contrairement au sol. C'est une caractéristique spéciale dans ce cas que le maximum de température n'apparaît pas à la surface comme c'est le cas chez le sol qui est imperméable à la radiation solaire, mais quelques centimètres plus bas. Une formule est dérivée pour la profondeur et le montant de ce maximum. Les résultats théoriques comparés avec les données de température réellement observées dans une couche de neige donnent un accord entre la théorie et la pratique quant à la profondeur du maximum de température. Le montant du maximum de température résulte en effet théoriquement dans une proportion correcte si la conductibilité effective dans les couches supérieures est supposée être 7 à 8 fois plus grande.

Au chapitre III cette distribution de température dans un médium perméable à la radiation est computée avec le coefficient d'absorption non sélectif ν qui doit apparaître par suite d'une radiation solaire périodique. $\nu = \infty$ donne comme cas spécial de la solution générale le résultat pour le sol. Aussi dans ce cas d'une radiation périodique un rayonnement effectif constant est supposé, en particulier avec l'intention de simplifier les conditions marginales de l'équation différentielle de la conductibilité de chaleur. En effet cette supposition rend largement justice aux conditions existantes, comme il est démontré dans la littérature. Comme résultat nous obtenons dans le cas spécial du sol un retard des extrêmes de température d'un mois et demi et une amplitude de 100 degrés pendant une période annuelle contrairement à MILANKOVITSCH dont les données respectives de 23 jours et 53 degrés l'on trouve dans le Handbuch de Climatologie (KÖPPEN-GEIGER). Dans notre solution un état stationnaire au commencement du printemps est supposé. Ces conditions sont discutées à fond. Dans la période diurne nos résultats ne diffèrent pas beaucoup de ceux reçus par MILANKOVITSCH. Une comparaison avec les observations de la température du sol à Tiflis montre que nos données correspondent bien aux faits empiriques. Une discussion détaillée des résultats obtenus par l'équation générale pour une couche de neige imperméable à la radiation donne les propositions importantes:

1. *Dans la période annuelle et sous conditions normales la bien connue formule de Poisson pour la transmission des ondes de température de la surface à la profondeur peut de même être appliquée à la neige.*

2. *D'autre part dans la période diurne la formule de* POISSON *n'est plus appliquable.*

La conclusion immédiate en est que les montants pour la conductibilité de chaleur dans la neige calculés par ABELS et d'autres d'après la formule de POISSON sont incorrects et ont besoin d'une correction. Il est démontré qu'en général la diminution de l'amplitude dans la neige calculée à l'aide de notre formule est plus grande que les montants reçus par la formule de POISSON tandis que le retard des phases ne se distingue pas dans la même proportion. Par cela le fait, mentionné spécialement par KERÄNEN, que les coefficients de la conductibilité de chaleur computés des amplitudes sont toujours plus petits que ceux résultant du retard des phases, trouve son explication.

Einleitung.

Über die Dichte-, Temperatur- und Strahlungsverhältnisse einer Schneedecke liegen eine Reihe von Untersuchungen experimenteller und theoretischer Natur älteren und jüngeren Datums vor. Die Verhältnisse sind beim Schnee im Vergleich zum festen Erdboden aus mehreren Gründen verwickelter, so daß auch die theoretische Behandlung des Fragenkomplexes bedeutend schwieriger ist, als bei analogen Problemen im Erdboden. Doch schon beim Erdboden stößt die theoretische Untersuchung zum Teil auf erhebliche Schwierigkeiten, so z. B. bei der Behandlung der sich in das Erdinnere fortpflanzenden Temperaturänderungen der Oberfläche. Der Grund liegt hier in einer mangelnden Isotropie des Bodens. In der Theorie der Wärmebewegungen im Erdboden wird ja meistens eine homogene unveränderliche Konstitution des Bodens vorausgesetzt, was jedoch tatsächlich keineswegs erfüllt sein muß. Vor allem durch den veränderlichen Feuchtigkeitsgehalt werden die Temperatur- und die Wärmeleitfähigkeit derart geändert, daß die einfache Theorie nicht mehr anwendbar ist. Wir sind über diese Verhältnisse im Erdboden durch umfangreiche und eingehende Untersuchungen u. a. von P. Schreiber [*1*] und Ad. Schmidt [*2*] gut unterrichtet. Eine Folge des erwähnten Pseudoisotropismus des Erdbodens ergibt sich unmittelbar aus der Theorie der periodischen Wärmebewegungen und kann nach Anderko [*3*] als Kriterium des Isotropismus bezeichnet werden. Untersucht man nämlich die Modifikation, die eine von der Oberfläche in die Tiefe vordringende Temperaturwelle erfährt, so ergibt die Theorie (siehe z. B. Keränen [*4*], S. 226), daß das logarithmische Dekrement der Amplituden für jede Partialwelle gleich der Verzögerung der Phasenzeiten für dieselbe Welle sein muß, vorausgesetzt, daß es sich um einen in bezug auf die Temperatur- und Wärmeleitfähigkeit örtlich und zeitlich homogenen Boden handelt. Man kann nun sowohl aus der Abnahme der Amplitude, als auch aus der Verzögerung der Phasenzeiten einer Partialwelle den Betrag der Wärmeleitfähigkeit berechnen und müßte bei Isotropie des Bodens denselben Wert erhalten. Tatsächlich ist dies meistens nicht der Fall, sondern die auf zwei verschiedene Arten berechneten Leitfähigkeiten zeigen zum Teil erhebliche Abweichungen. Trotzdem gelangt man beim Erdboden im allgemeinen zu einer hinreichend guten Übereinstimmung zwischen der (einfachen) Theorie und den tatsächlichen Beobachtungen, insbesondere für größere Tiefen (siehe dazu Ad. Schmidt, loc. cit.).

Bei einer Schneedecke liegen die Verhältnisse im Prinzip ähnlich, doch sind einige grundsätzliche Unterschiede im Vergleich zum Erdboden vorhanden. Während beim Erdboden der Pseudoisotropismus in erster Linie in der stark wechselnden Bodenfeuchtigkeit seine Ursache findet, ist es beim Schnee vor allem die starke Veränderlichkeit der Dichte oder des Raumgewichtes (siehe dazu Eckel und Thams [*5*], S. 291), die entsprechend die Wärme- und Temperaturleitung modifiziert. Beim Schnee ist es nämlich so, daß nicht nur die Temperaturleitfähigkeit a^2, die ja

bekanntlich mit der Wärmeleitfähigkeit k durch die Beziehung

$$a^2 = \frac{k}{\varrho\, c} \qquad \begin{matrix} \varrho = \text{Dichte} \\ c = \text{Spezifische Wärme} \end{matrix} \tag{1}$$

verknüpft ist, von der Dichte abhängt, sondern die Wärmeleitfähigkeit k selbst ist eine Funktion der Dichte, wobei empirisch eine ziemlich starke Abhängigkeit dieser beiden Größen festgestellt wurde. Mehrere Forscher haben sich mit dieser Frage befaßt und es liegen dementsprechend auch verschiedene empirische Formeln vor.

Nach Abels [*6*] gilt in c. g. s. Einheiten

$$k = 0{,}0068\, \varrho^2 \tag{2}$$

Nach Jansson [*7*]

$$k = 0{,}00005 + 0{,}0019\, \varrho + 0{,}006\, \varrho^4 \tag{3}$$

Nach Devaux [*8*]

$$k = 0{,}00007 + 0{,}007\, \varrho^2. \tag{4}$$

Im allgemeinen weichen die für verschiedene Dichtewerte nach (2) oder (4) berechneten Werte nicht allzuviel von einander ab. Bei unseren weiteren theoretischen Betrachtungen werden wir uns deswegen der Formel (2) von Abels ihres einfachen Baues halber bedienen. Dazu ist noch zu bemerken, daß die Dichte des Schnees in weiten Grenzen schwankt. Nach Keränen ([*4*], S. 282) ergaben sich bei frischgefallenen Schneearten in Sodankylä Unterschiede von flaumigem Schnee $\varrho \leq 0{,}010$ bis zu Schneeschlacken $\varrho = 0{,}257$. Noch größere Schneedichten wurden vor allem im Hochgebirge gefunden. Nach sechs bis neun Monaten beträgt die Dichte des Firnschnees 0,4 bis 0,5. Das Firneis hat eine Dichte von 0,85, das Gletschereis rund 0,9, während die Dichte des Klareises zu 0,917 angegeben wird. Die Formel (2) von Abels gilt nach dessen Angaben im Bereich $0{,}14 < \varrho < 0{,}34$. Für $\varrho = 0{,}9$ würde sich $k = 0{,}0055$ ergeben, während die Wärmeleitfähigkeit von Klareis $k = 0{,}0051$ beträgt. Für unsere prinzipiellen theoretischen Untersuchungen gibt die Formel (2) jedoch hinreichend genau die Verhältnisse wieder.

Die schon beim Erdboden erwähnte Unstimmigkeit bei der Berechnung der Wärmeleitfähigkeit aus der Abnahme der Amplituden bzw. Verzögerung der Phasenzeiten einer eindringenden Temperaturwelle zeigt sich, wenn wir die Theorie der periodischen Wärmebewegungen, wie sie beim Erdboden abgeleitet wurde, einfach auf die Verhältnisse in einer Schneedecke übertragen, ebenfalls. Dabei ist, wie Keränen ([*4*], S. 285) betont, besonders bemerkenswert, daß die aus den Amplituden des täglichen Temperaturganges berechneten Werte der Wärmeleitfähigkeit durchschnittlich nur halb so groß sind wie die aus den Phasenzeiten sich ergebenden. Hier zeigt sich also eine einsinnige Abweichung, während beim Erdboden die auf verschiedene Weise bestimmten Wärmeleitfähigkeiten mehr oder weniger unregelmäßig um einen Mittelwert schwanken. Es liegt daher hier die Vermutung nahe, daß nicht nur der Pseudoisotropismus der Schneedecke die Schuld daran trägt und wir werden im

Abschnitt III tatsächlich eine Erklärung für eine solche einsinnige Abweichung geben können.

Ein weiterer Umstand, der auf einen wesentlichen Unterschied zwischen einer Schneedecke und dem festen Erdboden hinweist, ist der, daß Schnee für die kurzwellige Sonnenstrahlung einigermaßen durchlässig ist. Während nämlich Schnee für die langwellige Strahlung der Atmosphäre (Gegenstrahlung) ein äußerst hohes Absorptionsvermögen besitzt (nach Falckenberg [9] wird 99,5% dieser Strahlung in einer ganz dünnen Oberflächenschicht absorbiert, nach Devaux [10] findet ab 1,5 μ vollkommene Absorption der Strahlung statt), sind für die kurzwellige Sonnenstrahlung verschiedene Absorptionskoeffizienten je nach der Schneeart oder der angewandten Meßmethode in der Literatur zu finden.

Die Definition des Absorptionskoeffizienten ν erfolgt bekanntlich derart, daß für den das Niveau z (z von der Oberfläche nach unten positiv gerechnet) erreichenden Bruchteil i_z der die Oberfläche durchsetzenden Strahlungsintensität i_0 die Beziehung:

$$i_z = i_0 \, e^{-\nu z} \tag{5}$$

angesetzt wird. Für den Betrag von ν findet sich für trockenen Schnee als Extremwerte in der Literatur nach Devaux [8]

$$\nu = 0{,}23,$$

nach Eckel und Thams [5]

$$\nu = 0{,}083,$$

während die Messungen von Sauberer [11] einen zwischen diesen Werten liegenden Mittelwert von

$$\nu = 0{,}150$$

ergaben.

Eine weitere Frage ist die nach einer für verschiedene Wellenlängenbereiche der kurzwelligen Strahlung selektiven Absorption. Nach Sauberer [11] besteht für Schnee nicht zu großer Dichte fast keine selektive Absorption. Erst bei größeren Dichten und damit zunehmendem Wassergehalt wird auch die Absorption selektiv. Im Grenzfall bei Übergang zu Eis ist dann eine starke spektrale Abhängigkeit der Absorption anzunehmen. Nach den klassischen Untersuchungen von Aschkinass [12] an Wasser (und das ist für Klareis in gleicher Weise vorauszusetzen) schwanken die Absorptionskoeffizienten von 0,0002 bei einem Wellenlängenbereich von $\lambda = 0{,}50\,\mu$ bis zu 0,28 bei $\lambda = 1{,}00\,\mu$. Diese Tatsache einer so starken selektiven Absorption bei Wasser und Eis würde die theoretische Behandlung des Problems wesentlich erschweren, da man gezwungen wäre, entweder für jeden (hinreichend kleinen) Spektralbereich gesonderte Ansätze zu machen oder durch geeignete Mittelwertbildung die Schwierigkeit zu umgehen. Beim Schnee ist, wie erwähnt — solange wir uns auf geringere Dichten beschränken —, diese Verkomplizierung des Problems nicht vorhanden und wir können mit einem für den gesamten kurzwelligen Strahlungsbereich einheitlichen Absorptionskoeffizienten rechnen.

Schließlich müssen wir noch Angaben über das Reflexionsvermögen oder die Albedo des Schnees machen, bevor wir zur eigentlichen theoretischen Untersuchung schreiten. Nach Eckel und Thams [*5*] schwankt die Albedo zwischen 60 und 90%, nach Sauberer [*11*] zwischen 73 und 84%. Im allgemeinen dürfte man mit einem mittleren Wert zwischen 75 und 85% den tatsächlichen Verhältnissen am besten gerecht werden.

I. Abkühlung durch Ausstrahlung.

In einer von mir unlängst vollendeten Arbeit (Reuter [*13*]) habe ich das Problem der nächtlichen Abkühlung des Bodens und der bodennahen Schicht behandelt. Bezeichnen wir mit R den als konstant angenommenen Betrag der effektiven Ausstrahlung der Bodenoberfläche (d. i. Schwarzstrahlung minus Gegenstrahlung) mit k, ϱ und c jeweils die Koeffizienten der Wärmeleitung, die Dichte und die spezifische Wärme — wobei wir bei den Bodenkonstanten den Index B anfügen und die spezifische Wärme der Luft mit c_p bezeichnen, um anzudeuten, daß darunter die spezifische Wärme bei konstantem Druck zu verstehen ist — und ist ferner A der Austauschkoeffizient der Luft und γ der zu Beginn des Ausstrahlungsprozesses in der Luft vorhandene (lineare) Temperaturgradient, so ergibt sich (Reuter loc. cit.) bei Beschränkung auf Wärmetransport in der Vertikalen für die Abkühlung der Bodenoberfläche ΔT_B nach der Zeit t:

$$\Delta T_B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(R + \gamma c_p A)}{\sqrt{k_B \varrho_B c_B} + c_p \sqrt{A \varrho}} \sqrt{t}. \tag{6}$$

Wie ich in meiner früheren Arbeit erwähnt habe, geht die Formel (6) für $A = 0$ in eine von Brunt ([*14*], S. 139) angegebene über, während für $A \neq 0$ aber $\gamma = 0$ sich eine von Philipps ([*15*], S. 303) abgeleitete Formel ergibt. Bei der Diskussion dieser Formel (6) zeigte sich bei geringen Austauschwerten in der Luft (und solche Verhältnisse liegen bei windschwachen Strahlungsnächten jedenfalls vor) ein enorm großer Betrag der nächtlichen Abkühlung einer Schneeoberfläche. Dagegen ergaben sich beim Erdboden und auch bei Eis durchaus mit der Erfahrung zu vereinbarende Beträge. Wir müssen hier auf die in meiner früheren Arbeit nur kurz erwähnte Tatsache näher eingehen. In Tabelle I ist für Schnee und Eis bei verschiedenen Anfangstemperaturgradienten γ in der Luft und für verschiedene Austauschwerte A in Gramm pro cm und sek der Abkühlungsbetrag der Oberfläche nach 9 Stunden angegeben, wie er sich aus Formel (6) berechnen läßt. Dabei wurde für Schnee für die effektive Ausstrahlung $R = 0{,}08$ für Eis $R = 0{,}10$ cal pro qcm und Minute gesetzt. Die Dichte von Schnee wurde zu 0,2, diejenige von Eis mit 0,917 g cm^{-3} angenommen und für beide Medien $c_B = 0{,}504$ cal pro Grad und gramm gesetzt. Für die Luft schließlich wurde mit $c_p = 0{,}2405$ und mit einer Dichte $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ gerechnet. Die Wärmeleitfähigkeit errechnete sich aus Formel (2) mit $k_B = 0{,}00027$ cal pro cm/sek und Grad, während bei Eis in denselben Einheiten der Betrag $k_B = 0{,}0051$ eingesetzt wurde.

Tabelle 1. *Betrag der Abkühlung der Schnee- bzw. Eisoberfläche nach 9 Stunden für verschiedene Anfangstemperaturgradienten γ und verschiedene Austauschkoeffizienten A in der darüber lagernden Luft.*

Schnee

$\gamma \backslash A$	0,00	0,01	0,05	0,10	0,40	0,70	1,00	5,00	10,0
1,0	50,8	43,7	37,1	33,3	24,9	21,6	19,4	11,7	9,6
0,5	50,8	43,7	37,1	33,3	24,8	21,5	19,2	11,2	8,8
— 1,0	50,8	43,7	37,1	33,3	24,4	20,8	18,6	9,7	6,6
— 3,0	50,8	43,7	37,1	33,3	24,1	20,4	18,0	7,7	3,6
— 5,0	50,8	43,7	37,1	33,1	23,7	19,9	17,3	5,8	0,6

Eis

$\gamma \backslash A$	0,00	0,01	0,05	0,10	0,40	0,70	1,00	5,00	10,0
1,0	7,1	7,0	6,9	6,7	6,4	6,3	6,1	5,4	5,2
0,5	7,1	7,0	6,9	6,7	6,4	6,3	6,1	5,3	4,9
— 1,0	7,1	7,0	6,9	6,7	6,4	6,2	6,0	4,7	3,9
— 3,0	7,1	7,0	6,9	6,7	6,3	6,0	5,8	4,0	2,6
— 5,0	7,1	7,0	6,9	6,7	6,2	5,9	5,3	3,3	1,3

Man erkennt aus der Tabelle 1, daß für geringe Austauschwerte in der Luft sich bei Schnee tatsächlich enorm hohe Abkühlungsbeträge herausstellen. Mit zunehmenden Austauschbeträgen der darüber lagernden Luft nehmen zwar auch die Abkühlungsbeträge rasch ab, bleiben aber immer noch bis zu Werten von $A = 1{,}00$ recht hoch. Erst bei noch größeren Austauschwerten ergeben sich dann verhältnismäßig geringe Abkühlungsbeträge. Der Einfluß einer adiabatischen oder stabilen Anfangstemperaturverteilung in der Luft fällt kaum ins Gewicht. Bei negativen Werten von γ (also Inversionen als Anfangszustand) wird die Abkühlung auch erst bei größeren Werten von A, dann allerdings erheblich, vermindert. Die entsprechenden Abkühlungsgrößen bei Eis halten sich innerhalb mäßiger Grenzen und sind mit der Erfahrung ohne weiteres vereinbar. Auch dort erkennt man deutlich den die Abkühlung (bei gleichbleibender effektiver Ausstrahlung!) hemmenden Einfluß einer Inversion. Den Strahlungseinfluß einer Inversion, der sich in einer Zunahme der atmosphärischen Gegenstrahlung und damit in einer Verminderung der effektiven Ausstrahlung geltend macht, wollen wir hier nicht in Betracht ziehen. Der von uns verwendete Betrag von $R = 0{,}08$ cal pro qcm und Minute ist ohnedies schon ziemlich niedrig veranschlagt. Wenn also auch bei zu großer Abkühlung der Schneeoberfläche zweifellos es schließlich die zunehmende Gegenstrahlung ist, die die weitere Temperaturabnahme stark herabsetzt oder gänzlich verhindert, so wirkt sich dies doch erst bei einer relativ großen Temperaturdifferenz Schneeoberfläche-Luft aus. Für kürzere Zeiträume ist $R =$ konst. sicher eine brauchbare Annahme, wie auch zahlreiche experimentelle Untersuchungen zeigen, und damit gelangt man eben bei geringen Austauschwerten der Luft zu enormen Abkühlungsgeschwindigkeiten, was mit der Erfahrung nicht in Einklang steht (siehe dazu auch Wexler [*26*]).

Um nun bei Schnee zu mit der Erfahrung zu vereinbarenden Ergebnissen zu gelangen, hat man, wie ich in meiner früheren Arbeit bereits angedeutet habe, nach anderen, der Abkühlung entgegenwirkenden Ursachen zu suchen. Der Grund für die bei Schnee und Eis so stark differierende Abkühlungsgröße liegt allein bei der so stark unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeit in den beiden Medien. Es liegt also die Vermutung nahe, daß im Schnee neben der äußerst geringen (molekularen) Wärmeleitfähigkeit eine Wärmescheinleitung eine Art Austausch wirksam sein muß, der dann den tatsächlich im Schnee stattfindenden Wärmetransport (scheinbar) vergrößert. Über die Natur eines solchen Austausches im Schnee kann man sich etwa folgende Vorstellungen machen. Die im Schnee infolge dessen lockeren Gefüges enthaltenen Luftblasen geraten unter gewissen Bedingungen in Bewegung. Der dadurch im Schnee verursachte (allerdings äußerst schwache) Luftstrom bewirkt, ähnlich wie die Austauschvorgänge in der Luft, einen zusätzlichen, den molekularen bei weitem übertreffenden Wärmetransport. Als primäre Ursache dieser Luftströmungen im Schnee können zunächst Konvektionsströme in Frage kommen, die bald nach Beginn des Ausstrahlungsvorganges infolge der sich in den obersten Schichten einstellenden starken Temperaturgradienten ausgelöst werden. Da jedoch der Schnee nur eine beschränkte Luftdurchlässigkeit besitzt, werden diese Konvektionsströme stark gehemmt und bewirken so eine Wärmeübertragung auf relativ kurze Strecken. Betrachten wir diesen Vorgang als Austauschprozeß, so bedeutet dies, daß die Größe des „Mischungsweges" hier durch die mehr oder weniger große Permeabilität des Schnees bestimmt wird, sehr im Gegensatz etwa zu den Austauschvorgängen in der Luft, wo der Mischungsweg eine der jeweiligen turbulenten Strömung eigene Zustandsgröße ist.

Messungen über die Luftdurchlässigkeit des Schnees sind nur sehr wenige in der Literatur zu finden. Von Bader [*16*] liegen solche Bestimmungen vor, doch gestatten diese nicht ohne weiteres eine Austauschgröße für unsere Zwecke festzulegen, zeigen aber gut, daß unsere Überlegungen im Prinzip ohne weiteres denkbar sind. Die erwähnten Messungen von Bader lehren auch, daß verhältnismäßig geringe Druckschwankungen relativ starke Luftströme im Schnee zur Folge haben können. Man könnte also in unserem Fall auch die kurzperiodischen Druckschwankungen der Atmosphäre als Ursache für Luftströmungen im Schnee verantwortlich machen, wobei man sich dann die Austauschströmungen im Schnee als Ein- oder Auspumpvorgang vorzustellen hätte.

Wie immer man sich nun solche Austauschvorgänge im Schnee erklären mag, jedenfalls muß die wirksame Wärmeleitung größer sein, als sich etwa nach Formel (2) für bestimmte Dichtewerte ergeben würde, wenn wir nach Formel (6) die Abkühlung berechnen und mit den tatsächlich beobachteten Beträgen vergleichen. Wird der Schnee kompakter oder tritt weitgehende Vereisung auf, dann nähert sich ohnedies die Dichte und damit die Wärmeleitfähigkeit dem für Eis angenommenen Wert und wir erhalten in so einem Falle — wie die Tabelle I zeigt — auch ohne die Annahme eines Austausches brauchbare Ergebnisse.

Es erscheint in diesem Zusammenhang angebracht, auf einen leicht möglichen Irrtum hinzuweisen. Man könnte nämlich glauben, daß die beobachtete große Abkühlung der Schneeoberfläche etwa verglichen mit der einer Eis- oder Wasseroberfläche ihre Ursache in einer stärkeren Ausstrahlung oder Verdunstung der Oberfläche zu finden hätte. In Wirklichkeit ist dies keineswegs der Fall. Im Gegenteil, die effektive Ausstrahlung einer Schneedecke ist im allgemeinen geringer als diejenige bei Eis oder Wasser. Da ferner die Sättigung über Schnee und Eis früher erreicht wird als bei Wasser, so ist auch der Wärmeverlust durch Verdunstung bei sonst gleichen Bedingungen geringer. Die Ursache der so starken Abkühlung der Schneeoberfläche ist also allein in der so äußerst geringen Wärmeleitfähigkeit des Schnees zu suchen, wodurch der Nachschub von Wärme aus tieferen Schichten zur Schneeoberfläche stark gehemmt ist und die ganze Ausstrahlungsabkühlung auf Kosten der Oberflächenschicht vor sich geht. Bei Wasser kommt noch die Konvektion dazu, die einen derart raschen Wärmeausgleich verursacht, daß die nächtliche Abkühlung der Oberfläche meist nur wenige Grade beträgt, sich aber dafür auf tiefere Schichten erstreckt.

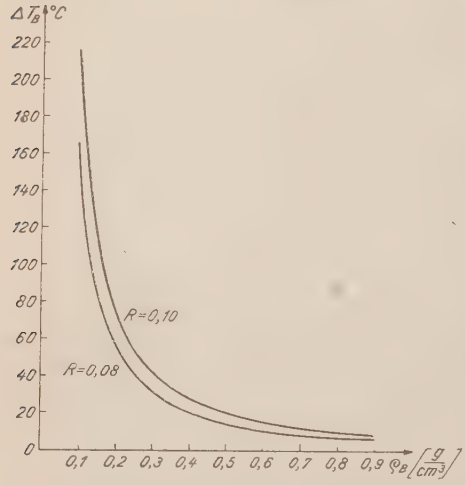


Abb. 1. Abkühlung ΔT_B in Graden nach 12 Stunden in Abhängigkeit von der Schneedichte ϱ_B für zwei verschiedene Werte der effektiven Ausstrahlung R in cal pro qcm und Minute und für $A = 0$ in der darüber befindlichen Luft.

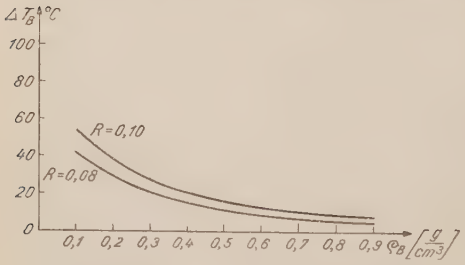


Abb. 2. Abkühlung ΔT_B in Graden nach 12 Stunden in Abhängigkeit von der Schneedichte ϱ_B für zwei verschiedene Werte der effektiven Ausstrahlung R in cal pro qcm und Minute und für $A = 0{,}4$ in der darüber befindlichen Luft.

Um die Verhältnisse näher studieren zu können, kombinieren wir Formel (2) mit Formel (6) und erhalten dann die Abkühlung in Abhängigkeit von der Schneedichte. Die Abb. 1 und Abb. 2 veranschaulichen diesen funktionellen Zusammenhang, wobei einmal der Austausch in der Luft gleich Null angesetzt wurde und das zweite Mal ein Austauschkoeffizient $A = 0{,}4$ und ein Anfangstemperaturgradient in der Luft $\gamma = 0{,}5$ angenommen wurde. Man erkennt aus Abb. 1 und Abb. 2 unmittelbar, daß für größere

Dichten etwa $\varrho = 0{,}4$ die Abkühlungsbeträge in beiden Fällen nicht allzusehr voneinander abweichen und auch größenordnungsmäßig mit der Erfahrung durchaus vereinbar sind. Bei geringeren Schneedichten jedoch ergeben sich nach Abb. 1 und auch Abb. 2 enorm hohe Abkühlungswerte und wir sind also in so einem Falle gezwungen, die tatsächlich wirksame Wärmeleitung größer anzunehmen. Nach Keränen [4] betrug bei einem ungestörten täglichen Temperaturgang die Abkühlung in einer zwölfstündigen Strahlungsnacht 16 bis 18°, während die Tagesschwankung 29° ausmachte. Die Schneedichte war in diesem Fall im Mittel 0,16. Aus den Abb. 1 und 2 erkennt man, daß sich eine solche Abkühlung bei Dichten zwischen 0,4 bis 0,5 ergeben würde. Nach Formel (2) berechnet sich dann, daß die tatsächlich wirksame Wärmeleitfähigkeit in diesem Fall etwa das Sieben- bis Achtfache betragen müßte, als sich nach Formel (2) für eine Dichte von 0,16 errechnen läßt. Da in der Differentialgleichung für die Wärmeleitung bei Austauschvorgängen an Stelle der Temperaturleitfähigkeit (1) der Wert $\frac{A_B}{\varrho_B}$ aufscheint, würde sich in unserem Falle für

$$A_B = \frac{0{,}0068 \cdot 7 \cdot (0{,}16)^2}{0{,}504} = 0{,}0024 \text{ g cm}^{-1} \text{ sek}^{-1} \tag{7}$$

ergeben.

II. Erwärmung durch konstante kurzwellige Einstrahlung bei gleichzeitiger konstanter effektiver Ausstrahlung.

Bezeichnen wir mit i_0 den die Oberfläche erreichenden und sie nach Abzug der Albedo tatsächlich durchsetzenden, der Einfachheit halber zunächst als konstant vorausgesetzten Betrag der Sonnenstrahlung pro qcm und Minute, so wird nach (5) der Bruchteil $i_z = i_0 e^{-\nu z}$ das Niveau z erreichen. Auf dem weiteren Weg Δz wird dann davon wieder der Bruchteil $\nu \Delta z$ absorbiert, so daß ein Volumelement in dieser Tiefe in der Zeit Δt eine Temperaturänderung

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Delta t = \frac{\nu i_0}{\varrho_B c_B} e^{-\nu z} \Delta t \tag{8}$$

erfährt. Mit (8) können wir nun die für den Einstrahlungsprozeß gültige Differentialgleichung aufstellen. Wir sehen, um das Problem nicht allzusehr zu komplizieren, von dem Beitrag, den die Luft zur Erwärmung oder Abkühlung durch Austausch liefert, hier ab. Die Verhältnisse liegen nämlich hier wesentlich anders als beim nächtlichen Ausstrahlungsprozeß (siehe Reuter loc. cit.) und es besteht die Gefahr, daß der mathematische Apparat auf Kosten der Übersichtlichkeit zu sehr anwächst. Die mathematischen Überlegungen sind aber im Prinzip denen beim nächtlichen Ausstrahlungsprozeß durchgeführten ähnlich, so daß auch weiterhin bezüglich gewisser Einzelheiten auf meine bereits mehrfach angezogene Arbeit verwiesen werden kann.

Wenn wir für die Temperaturleitfähigkeit jetzt a^2 schreiben, so haben wir zusammen mit der bekannten Differentialgleichung der Wärmeleitung anzusetzen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{i_0 \nu e^{-\nu z}}{\varrho_B c_B}, \tag{9}$$

wenn z positiv zum Schneeinneren gezählt wird.

Als Nebenbedingungen bestimmen wir:

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad T = 0 \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad k_B \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 = R = \text{konst.} \end{aligned} \tag{10}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir als Anfangszustand $T = 0$ (wir können später jederzeit zu einem beliebigen Wert T — konst. übergehen). Wir beschränken uns hier, wie auch beim nächtlichen Ausstrahlungsprozeß auf den Wärmetransport in der Vertikalen. Die Oberflächenbedingung in (10) besagt, daß wir einen konstanten Betrag der effektiven Ausstrahlung, die wir mit R bezeichnen, als wirksame Ausstrahlung voraussetzen.

Führen wir eine neue Variable $y = T + q\, e^{-\nu z}$ ein, so wird

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad y = q\, e^{-\nu z} = \Phi(z) \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_0 = \frac{R}{k_B} - \nu q \end{aligned} \tag{12}$$

und weiters ergibt sich für q:

$$q = \frac{i_0}{k_B \nu}. \tag{13}$$

Damit schreibt sich die zweite Gleichung (12) auch in der Form

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_0 = \frac{R - i_0}{k_B} = -\frac{B}{k_B}, \tag{12a}$$

wenn wir mit $B = i_0 - R$ die Strahlungsbilanz bezeichnen.

Zur Lösung von (11) mit (12) bedienen wir uns des bekannten Verfahrens, daß die Anfangstemperaturverteilung fiktiv über die Oberfläche hinaus derart verlängert wird, daß die Oberflächenbedingung identisch erfüllt wird. In unserem Falle geschieht dies (siehe REUTER loc. cit.) dadurch, daß wir

$$\Phi_{(-\alpha)} = q\, e^{-\nu \alpha} + \frac{2B}{k_B} \alpha \tag{14}$$

setzen. Die Lösung ergibt sich dann mit (14) aus der allgemeinen Lösung der Wärmeleitungsgleichung (siehe REUTER loc. cit. oder RIEMANN-WEBER

[17], Bd. II, § 37ff.) durch einfaches Ausrechnen der dabei auftretenden Integrale. Man erhält so

$$y = \frac{q}{2}\left\{e^{a^2\nu^2 t-\nu z}\left[1-\Theta\left(a\,\nu\sqrt{t}-\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\,e^{a^2\nu^2 t+\nu z}\left[1-\Theta\left(a\,\nu\sqrt{t}+\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\right\}+$$
$$+\frac{2}{k_B\sqrt{\pi}}B\,a\sqrt{t}\,e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}-z\frac{B}{k_B}\left[1-\Theta\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{15}$$

Hiebei bedeutet die Funktion

$$\Theta(u)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-\beta^2}d\beta \tag{16}$$

das bekannte Gaußsche Fehlerintegral.

Führen wir nun wieder an Stelle der Hilfsvariablen y die Temperatur T ein, so folgt sofort:

$$T = y - q\,e^{-\nu z}. \tag{17}$$

Man kann sich nun auch nachträglich leicht überzeugen, daß (17) tatsächlich die gesuchte Lösung mit allen notwendigen und hinreichenden Bedingungen darstellt. Der Ausdruck ist jedoch keineswegs übersichtlich und wir werden daher versuchen, unter gewissen zulässigen Vereinfachungen plausible Ergebnisse abzuleiten. Man kann zunächst unter der Annahme, daß seit dem Anfangszustand $T = 0$ hinlängliche Zeit verflossen ist, den ersten Ausdruck in der Gleichung (15) mit Hilfe einer Reihenentwicklung für die Funktion $1-\Theta(x)$ wesentlich vereinfachen. Die Reihe lautet (siehe Riemann-Weber [17] Bd. I, § 26):

$$1-\Theta(x)=\frac{2\,e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p\,(2\,p)!}{p!}\left(\frac{1}{2\,x}\right)^{2p+1}. \tag{18}$$

Für hinreichend große x können wir uns auf das erste Glied der Reihenentwicklung beschränken und erhalten statt (18):

$$1-\Theta(x)\sim\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}. \tag{19}$$

Auf unseren Fall angewendet ergibt sich nach hinreichend langer Zeit an Stelle von (17)

$$T=\frac{q}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}\left[\begin{array}{c}2a\nu\sqrt{t}\\ a^2\nu^2t-\dfrac{z^2}{4a^2t}\end{array}\right]\right\}+\frac{2}{k_B\sqrt{\pi}}\,B\,a\sqrt{t}\,e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}-$$
$$-\,z\frac{B}{k_B}\left[1-\Theta\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]-q\,e^{-\nu z}. \tag{20}$$

Bedenken wir noch, daß

$$\frac{z^2}{4\,a^2\,t} \ll \alpha^2\,\nu^2\,t \tag{21}$$

anzunehmen ist, so können wir (20) in der Form

$$T = \frac{q}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-\frac{z^2}{4\,a^2\,t}}}{a\,\nu\sqrt{t}}\right) + \frac{2}{k_B\sqrt{\pi}}\,B\,a\sqrt{t}\,e^{-\frac{z^2}{4\,a^2\,t}} - \\ - z\frac{B}{k_B}\left[1 - \Theta\left(\frac{z}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right] - q\,e^{-\nu z} \tag{22}$$

schreiben.

Uns interessiert nun folgendes Problem: Infolge der fortgesetzten Einstrahlung wird die Temperatur im Schnee in den verschiedenen Schichten eine Steigerung erfahren. Die Frage lautet nun, wo das Maximum der Temperatur nach hinreichend langer Zeit eintritt. Wäre das Medium (hier der Schnee) für die einfallenden Strahlen *nicht* durchlässig, so würde die Antwort selbstverständlich so lauten, daß die maximale Temperatur an der Oberfläche auftritt. Bei Schnee ist dies jedoch keineswegs von vorneherein anzunehmen und wir werden auch sehen, daß es im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht. Um das Problem zu lösen, differenzieren wir (22) nach z, setzen für q den Wert nach (13) ein und erhalten als Bedingungsgleichung für die Tiefe des Temperaturmaximums z_0:

$$-\frac{i_0\,z_0}{2\,a^3\,\nu^2\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{z_0^2}{4\,a^2\,t}} - B + B\,\Theta\left(\frac{z_0}{2\,a\sqrt{t}}\right) + i_0\,e^{-\nu z_0} = 0. \tag{23}$$

Das erste Glied in (23) wird für jeden Wert $0 \leqq z_0 \leqq \infty$ für genügend große Werte von t beliebig klein werden. Wir können also bei den weiteren Überlegungen davon absehen und erhalten:

$$(i_0 - R)\cdot\Theta\left(\frac{z_0}{2\,a\sqrt{t}}\right) = i_0 - R - i_0\,e^{-\nu z_0} \tag{24}$$

als Bedingungsgleichung für z_0.

Wir betrachten zuerst den Fall $i_0 = 0$. Aus (24) folgt sofort:

$$\Theta\left(\frac{z_0}{2\,a\sqrt{t}}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad z_0 = \infty,$$

was für den reinen Ausstrahlungsprozeß unmittelbar verständlich ist.

Nun setzen wir $i_0 = R$ und erhalten:

$$R\,e^{-\nu z_0} = 0 \quad \text{oder} \quad z_0 = \infty.$$

Also gilt auch für den Fall, daß die Einstrahlung gleich der Ausstrahlung ist, daß das Maximum der Temperatur unendlich tief liegt.

Als nächstes betrachten wir den Fall $R > i_0$, d. h. also, daß die Ausstrahlung die Einstrahlung überwiegt. Die Formel (24) liefert auch hier das zu erwartende Resultat. Wir schreiben dazu (24) in der Form:

$$\Theta\left(\frac{z_0}{2\,a\sqrt{t}}\right) = 1 + \frac{i_0}{R - i_0}\,e^{-\nu z_0}. \tag{25}$$

Wir haben dabei die Gleichung (24) so umgeformt, daß auf der rechten Seite von (25) jetzt mit der Annahme $R > i_0$ zu 1 ein positives Glied addiert wird. Da die Funktion $\Theta\left(\frac{z_0}{2a\sqrt{t}}\right)$ keinen Wert über 1 annehmen kann, folgt unmittelbar aus (25)

$$e^{-\nu z_0} = 0 \text{ oder } z_0 = \infty. \tag{26}$$

Wir sehen also, daß für alle Fälle $0 \leqq i_0 \leqq R$ $z_0 = \infty$ folgt. Einen endlichen Wert von z_0 bekommen wir nur im Falle $R < i_0$, den wir jetzt betrachten wollen. Wir können in diesem Falle die Gleichung (25) noch etwas vereinfachen, da für einen endlichen Wert von z_0 nach hinreichend langer Zeit die Funktion $\Theta\left(\frac{z_0}{2a\sqrt{t}}\right)$ beliebig klein werden wird. Damit erhalten wir schließlich für:

$$R < i_0 \qquad e^{-\nu z_0} = \frac{i_0 - R}{i_0} \tag{27}$$

oder

$$z_0 = \frac{1}{\nu} \ln \frac{i_0}{i_0 - R}. \tag{27a}$$

In (27a) fällt auf, daß darin nicht mehr der Wärme- oder Temperaturleitfähigkeitskoeffizient aufscheint. Der Wert z_0 für die Tiefe des Maximums der Temperatur hängt also nach hinreichend langer Zeit nur von der Einstrahlung, der Ausstrahlung und dem Absorptionskoeffizienten ab.

Für $\nu = \infty$ erhalten wir $z_0 = 0$, also die Oberfläche, was ohne weiteres verständlich ist. Dasselbe gilt für den Fall $R = 0$.

Die Abb. 3 zeigt für verschiedene Werte der effektiven Ausstrahlung und für zwei Albedowerte die Abhängigkeit von z_0 von dem Absorptionskoeffizienten in dem in der Einleitung diskutierten Größenbereich. Dabei wurde i_0 zu 1 cal pro qcm und Minute angenommen. Nach Eckel und Thams [5], (S. 313) ist ein derartiger Fall im Mittel über mehrere Stunden, z. B. am 19. März 1938 in Davos, verwirklicht gewesen. Als Albedowerte wurden in Abb. 3 einmal 75% und einmal 85% angenommen. Wie aus Abb. 3 zu entnehmen ist, schwanken die Werte von z_0 bei einem mittleren Absorptionskoeffizienten (siehe dazu Einleitung) von 0,15 zwischen 2,5 und 8,8 cm. Diese Werte stimmen mit der Erfahrung recht gut überein. Nach Keränen [4] ergab sich in Sodankylä ein Maximum

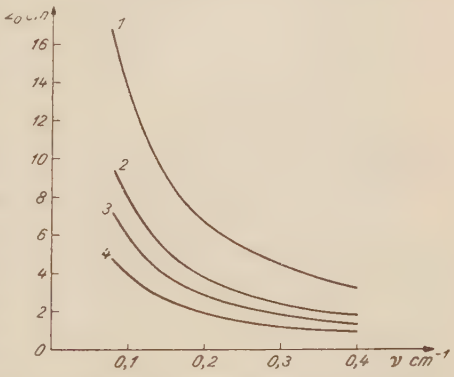


Abb. 3. Tiefe des Maximums der Temperatur in Abhängigkeit vom Absorptionskoeffizienten ν für verschiedene Werte der effektiven Ausstrahlung R und für verschiedene Albedowerte. Und zwar (1) $R = 0{,}11$ Albedo 85%, (2) $R = 0{,}08$ Albedo 85%, (3) $R = 0{,}11$ Albedo 75%, (4) $R = 0{,}08$ Albedo 75%.

der Temperatur in 3 bis 4 cm Tiefe, während NIEDERDORFER [18] in 1 bis 2 cm unter der Schneeoberfläche dieses Temperaturmaximum feststellte.

Als nächstes wollen wir nun nach der Größe dieses Temperaturmaximums, d. h. nach der Temperaturdifferenz $T_{z_0} - T_0$ fragen. Für die Oberfläche ergibt sich nach (22) mit $z = 0$:

$$T_0 = \frac{q}{\sqrt{\pi}\, a\, \nu \sqrt{t}} + \frac{2\,B}{k_B \sqrt{\pi}}\, a \sqrt{t} - q. \tag{28}$$

Das erste Glied wird für große t beliebig klein, so daß nach hinreichend langer Zeit die Oberflächentemperatur den Wert:

$$T_0 = \frac{2\,B}{k_B \sqrt{\pi}}\, a \sqrt{t} - q \tag{29}$$

besitzt.

Für T_{z_0} erhalten wir durch Einsetzen von (27a) in (22), wenn wir bedenken, daß $e^{-\frac{z_0^2}{4 a^2 t}}$ nach hinlänglicher Zeit genügend genau gleich 1 gesetzt werden kann und das erste Glied, wie in (28), für große Werte von t gegen Null geht:

$$T_{z_0} = \frac{2\,B}{k_B \sqrt{\pi}}\, a \sqrt{t} - \frac{B}{k_B \nu} \ln \frac{i_0}{B} - q \frac{B}{i_0}. \tag{30}$$

Die Differenz von (30) weniger (29) ergibt nun sofort:

$$T_{z_0} - T_0 = \frac{1}{k_B \nu} \left(R - B \ln \frac{i_0}{B} \right). \tag{31}$$

Man erkennt, daß in (31) zum Unterschied von (27a) der Wärmeleitungskoeffizient k_B aufscheint.

In Abb. 4 ist unter Benützung der Formel (2) der Betrag des Maximums für zwei verschiedene Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Dichte aufgetragen. Die Einstrahlung wurde wieder zu 1 cal pro qcm und Minute angenommen und eine Albedo von 85% vorausgesetzt. Die Ausstrahlung R wurde gleich 0,08 cal pro qcm und Minute gesetzt. Man erkennt hier ähnlich wie bei dem Abkühlungsprozeß in Abb. 1 und 2, daß für niedrige Werte ϱ_B sich sehr große Beträge des Maximums herausstellen würden. Der Grund liegt hier natürlich wieder in dem äußerst geringen Betrag der Wärmeleitfähigkeit. Wenn wir bei KERÄNEN [4] lesen, daß die Temperatur in einigen Zentimetern Tiefe etwa 2° über der auf der Oberfläche liegt und dabei die Dichte 0,16 betrug, so bekommen wir wieder einen Widerspruch zwischen Theorie

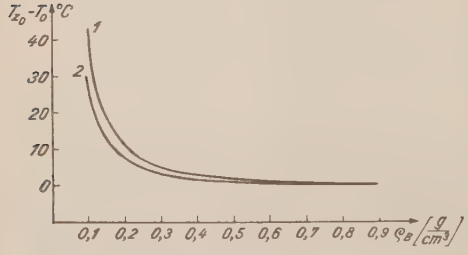


Abb. 4. Betrag des Temperaturmaximums in Abhängigkeit von der Schneedichte ϱ_B. (1) $R = 0{,}08$ Albedo 85%, $\nu = 0{,}15$, (2) $R = 0{,}08$ Albedo 85%, $\nu = 0{,}23$.

und Praxis. Wir haben beim Abkühlungsprozeß gesehen, daß mit der Erfahrung übereinstimmende Werte sich bei Dichten von 0,4 bis 0,5 ergeben würden, oder daß die tatsächlich wirksame Wärmeleitung etwa das Sieben- bis Achtfache der aus Formel (2) berechneten betragen müßte. Hier erkennen wir in Abb. 4 dasselbe. Bei Dichtewerten von 0,4 bis 0,5 ergeben sich die in der Natur beobachteten Beträge des Maximums und wir kommen also hier zu demselben Ergebnis, wie schon bei dem nächtlichen Ausstrahlungsvorgang. *Es muß also im Schnee ein Austausch vorhanden sein, der naturgemäß nur bei geringen Dichten wirksam ist und die molekulare Wärmeleitung, wie sie sich nach der Formel (2) von Abels ergeben würde, um mindestens das Sieben- bis Achtfache übertrifft.*

Am Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch den ganzen Temperaturverlauf im Schnee nach einer gewissen Zeit betrachten. Zu diesem Zwecke müssen wir noch die Lösung, wie wir sie in (15) bzw. (17) oder mit der Vereinfachung in (22) dargestellt haben, etwas umformen. Wir haben bis jetzt nur den Einstrahlungsprozeß betrachtet und sind von einer Anfangstemperaturverteilung $T = 0$ ausgegangen. Wir nehmen jetzt als Anfangszustand gleichfalls Isothermie an, jedoch nicht $T = 0$, sondern eine konstante Anfangstemperatur $T = T_a$. Weiters setzen wir voraus, daß zunächst der nächtliche Ausstrahlungsprozeß eine gewisse Zeit lang wirksam war und erst dann Einstrahlung eingesetzt hätte. Für $i_0 = 0$ und damit $q = 0$ erhalten wir aus (22) dann sofort für die nächtliche Ausstrahlung:

$$\Delta T = T_a - T = \frac{2\,R\,a}{k_B\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,e^{-\frac{z^2}{4\,a^2 t}} - z\frac{R}{k_B}\left[1 - \Theta\left(\frac{z}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{32}$$

Wir setzen nun als Gesamtlösung von (9) mit (10) unter den oben vorgenommenen Abänderungen nachfolgenden Ausdruck an, indem wir voraussetzen, daß *vor* dem Einstrahlungsprozeß eine die Zeit t_0 lang andauernde Ausstrahlung wirksam war. Wir können dann nachträglich verifizieren, daß der Ansatz tatsächlich die gesuchte Lösung mit allen notwendigen und hinreichenden Bedingungen darstellt. Wir schreiben die Lösung in der Form:

$$T = T_a + A_R + E + A_{i_0}, \tag{33}$$

wobei wir unter:

$$A_R = -\frac{2\,R\,a}{k_B\sqrt{\pi}}\sqrt{t_0 + t}\,e^{-\frac{z^2}{4\,a^2(t_0+t)}} + z\frac{R}{k_B}\left[1 - \Theta\left(\frac{z}{2\,a\sqrt{t_0+t}}\right)\right],$$

$$E = \frac{i_0}{2\,k_B\,\nu}\left\{e^{a^2\nu^2 t - \nu z}\left[1 - \Theta\left(a\,\nu\sqrt{t} - \frac{z}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right] + e^{a^2\nu^2 t + \nu z}\left[1 - \Theta\left(a\,\nu\sqrt{t} + \frac{z}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right]\right\} - \frac{i_0}{k_B\,\nu}\,e^{-\nu z},$$

$$A\,i_0 = +\frac{2\,i_0\,a}{k_B\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,e^{-\frac{z^2}{4\,a^2 t}} - z\frac{i_0}{k_B}\left[1 - \Theta\left(\frac{z}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right]$$

verstehen. Daß (33) tatsächlich die gesuchte Lösung ist, erkennt man sofort. Erstens ist die Differentialgleichung (9) erfüllt. Zweitens ergibt sich zur Zeit $t = 0$ der Abkühlungsbetrag nach (32) für die Zeit t_0 und schließlich ist auch für $z = 0$ die Oberflächenbedingung (10) erfüllt.

In Abb. 5 ist das Ergebnis veranschaulicht. Folgende Annahmen bezüglich der einzelnen Konstanten wurden dabei getroffen:

Ausgezogene Kurve: Dichte 0,2, $R = 0{,}08$ cal pro qcm und Minute. $i_0 = 1$ cal pro qcm und Minute.
Albedo 75%.
Wärmeleitfähigkeit das Siebenfache der nach Formel (2) resultierenden.

Die Kurve stellt den Temperaturverlauf im Schnee mit den obigen Konstanten nach 12 Stunden Ausstrahlung und sechsstündiger Einstrahlung dar.

Strichlierte Kurve: Dichte 0,2, $R = 0{,}08$ cal pro qcm und Minute. $i_0 = 1$ cal pro qcm und Minute.
Albedo 75%.
Wärmeleitfähigkeit das 20fache der nach Formel (2) resultierenden, das ist praktisch eine Wärmeleitfähigkeit von Klareis und ist für alle Fälle als obere Schranke eines möglichen Austausches zu werten.

Die Kurve stellt ebenfalls den Temperaturverlauf im Schnee nach 12 Stunden Ausstrahlung und sechsstündiger Einstrahlung dar.

Der Schnittpunkt der jeweiligen Ausstrahlungskurve mit der endgültigen Temperaturkurve (wobei zu bedenken ist, daß während des Einstrahlungsprozesses die Ausstrahlung weiter wirksam ist) gibt die Tiefe an, bis zu der die Einstrahlung Erwärmung verursacht. Es ist bemerkenswert, daß dies in beiden Fällen ungefähr denselben Betrag, nämlich 80 cm Tiefe, ergibt. In tieferen Schichten tritt auch während der Einstrahlung Abkühlung ein, die naturgemäß bei der größeren Wärmeleitfähigkeit größer ist. Das bereits früher eingehend diskutierte Maximum in einigen Zentimetern unter der Oberfläche ist gleichfalls aus Abb. 5 zu erkennen. Während also die Verhältnisse an der Oberfläche und einige Zentimeter darunter durch die Theorie in Abb. 5 im Einklang mit der Erfahrung wiedergegeben werden, trifft dies für die tieferen Schichten keineswegs mehr zu. Nach Keränen (loc. cit.) dringt die tägliche Temperaturwelle nur 35 cm tief ein und Niederdorfer erhält in 20 cm Tiefe eine Temperaturerhöhung um 2,5°, wogegen wir dies noch in 40 cm erhalten würden. Es bleibt also nichts

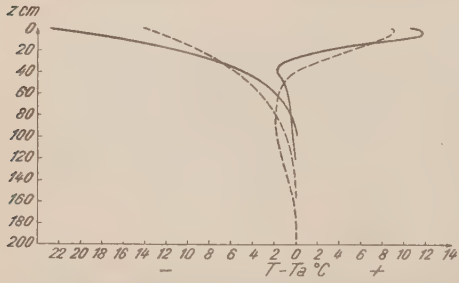


Abb. 5. Temperaturverteilung im Schnee nach einer 12stündigen Ausstrahlung *und* einer darauffolgenden 6stündigen Einstrahlung für zwei verschiedene Wärmeleitfähigkeiten. Nähere Erläuterung siehe Text.

anderes übrig, als für die tieferen Schichten wieder eine geringere Wärmeleitfähigkeit bzw. keinen Austausch anzunehmen, wodurch dann die einfache Theorie mit der Voraussetzung einer einheitlichen Wärmeleitung innerhalb der Schneedecke nicht mehr anwendbar ist.

Zusammenfassend lassen sich also die Ergebnisse der Abschnitte I und II folgendermaßen formulieren. Der Vergleich der tatsächlich beobachteten nächtlichen Abkühlung bzw. täglichen Erwärmung einer Schneedecke mit den aus der Theorie folgenden Werten ergibt, daß in den obersten Schichten der Schneedecke ein Austausch oder eine Wärmescheinleitung wirksam sein muß, die die in der Literatur angegebenen Beträge der Wärmeleitfähigkeit des Schnees um das Sieben- bis Achtfache übertrifft. Dabei ist die Abkühlung der Schneeoberfläche durch effektive Ausstrahlung und, wenigstens bei der nächtlichen Abkühlung, auch der Wärmeverlust bzw. -gewinn durch Austauschvorgänge in der darüber lagernden Luft in Rechnung gezogen. Die Verdunstung ist nicht berücksichtigt. Dies würde jedoch nur dazu führen, daß die Schneeoberfläche einen noch größeren Wärmeverlust erleidet, der durch Nachschub aus dem Innern vermindert werden muß, wenn sich nicht die Oberfläche zu stark abkühlen soll. Das heißt, es müßte dann eher ein noch größerer wirksamer Austausch im Schnee angesetzt werden als ohne Berücksichtigung der Verdunstung. Für tiefere Schichten, etwa unterhalb 10 cm Tiefe, ergibt sich dann größenordnungsmäßig wieder eine Wärmeleitfähigkeit, wie sie von mehreren Forschern an Hand der Fortpflanzung der Temperaturwellen von der Oberfläche zur Tiefe beobachtet und berechnet wurde. Da jedoch am Wärmeumsatz für kleinere Zeiträume gerade nur die obersten Schichten maßgebend beteiligt sind, ist der Austauschvorgang unbedingt in Rechnung zu stellen. Wir haben es also beim Schnee mit einem in bezug auf die Wärmeleitfähigkeit keineswegs isotropen Medium zu tun. Einesteils ist ja schon durch die starke Veränderlichkeit der Dichte mit der Tiefe eine Änderung der Wärmeleitfähigkeit gegeben. Doch würde dies, da die Dichte meist mit der Tiefe zunimmt, nach den Ergebnissen von Abels u. a. eine Zunahme der Wärmeleitfähigkeit mit der Tiefe bedingen, wogegen wir durch den erwähnten Austausch gerade in den obersten Schichten eine bedeutend größere wirksame Wärmeleitung anzunehmen gezwungen waren. Aber selbst wenn wir den Austausch außer acht lassen und mit einer mittleren Dichte rechnen, ist die Theorie der Fortpflanzung von Temperaturwellen von der Oberfläche zur Tiefe, wie sie für den strahlungsundurchlässigen Erdboden bereits von Fourier und Poisson abgeleitet wurde, nicht ohne weiteres auf ein strahlungsdurchlässiges Medium anwendbar, wie wir nun im Abschnitt III zeigen werden.

III. Einstrahlung mit jährlicher oder täglicher Periode.

Eine mit der Zeit veränderliche Einstrahlung kann immer durch eine Sinusreihe dargestellt werden. Es ist daher ausreichend, den Temperaturverlauf bei einer sinusförmigen Einstrahlung zu untersuchen. Die nun

folgende Ableitung ist im Prinzip einer von Emden [19] gegebenen ähnlich, weist aber infolge unterschiedlicher Voraussetzungen doch einige nicht unerhebliche Differenzen auf. Emden hat nämlich versucht, das Problem der Temperaturverteilung im Wasser rechnerisch zu erfassen und stand daher vor zum Teil bedeutend größeren Schwierigkeiten. Erstens setzte er als Oberflächenbedingung nicht eine konstante effektive Ausstrahlung an, sondern einen dem Newtonschen Abkühlungsgesetz entsprechenden Ansatz für Abkühlung durch Leitung nach außen und zweitens ergibt sich bei Wasser (wie wir in der Einleitung ausführlich diskutiert haben) durch die starke selektive Absorption eine bedeutende Komplizierung des Vorganges, was Emden durch eine geeignete Mittelbildung zu umgehen trachtet.

Wir setzen für die periodische Sonnenstrahlung an:

$$i_0 = i_1 + i_2 \sin N t \quad i_1 > i_2, \tag{34}$$

wobei

$$N = \frac{2\pi}{\tau} = 7{,}269 \cdot 10^{-5}\ \text{sek}^{-1} \text{ für } \tau = 1 \text{ Tag}$$

$$N = \frac{2\pi}{\tau} = 1{,}991 \cdot 10^{-7}\ \text{sek}^{-1} \text{ für } \tau = 1 \text{ Jahr}$$

zu setzen ist.

Mit (34) erhalten wir jetzt an Stelle der Differentialgleichung (9) folgende:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{i_1 \nu}{\varrho_B c_B} e^{-\nu z} + \frac{i_2 \nu}{\varrho_B c_B} e^{-\nu z} \sin N t, \tag{35}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad T = 0, \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad k_B \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 = R. \end{aligned} \tag{36}$$

Zur Lösung setzen wir zunächst

$$T = T_1 + T_2$$

und erhalten zwei Differentialgleichungen, und zwar:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{i_1 \nu}{\varrho_B c_B} e^{-\nu z}, \tag{37}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad T_1 = 0, \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad k_B \left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_0 = R. \end{aligned} \tag{37a}$$

Das ist aber die bereits gelöste Differentialgleichung (9), deren Lösung wir in (17) bzw. (22) wiedergegeben haben. Für T_2 bekommen wir die Gleichung:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{i_2 \nu}{\varrho_B c_B} e^{-\nu z} \sin N t, \tag{38}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad T_2 = 0, \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad \left(\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)_0 = 0. \end{aligned} \tag{38a}$$

Zur Lösung von (38) mit (38a) setzen wir an:

$$T_2 = v + w \cdot e^{-\nu z}$$

mit $w = w(t)$ einer Funktion von t allein.

Damit erhalten wir an Stelle von (38) zwei Gleichungen, und zwar erstens:

$$\frac{dw}{dt} = a^2 \nu^2 w + \frac{i_2 \nu}{\varrho_B c_B} \sin N t \tag{39}$$

und zweitens:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{40}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad v = -w(0)\, e^{-\nu z}, \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = \nu \cdot w(t). \end{aligned} \tag{40a}$$

Die Lösung von (39) ist prinzipiell einfach. Man findet bei geeigneter Wahl von Integrationskonstanten leicht:

$$w = -M \sin(N t + \varphi), \tag{41}$$

wobei

$$M = \frac{i_2 \nu}{\varrho_B c_B} \frac{1}{\sqrt{N^2 + a^4 \nu^4}}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N}{a^2 \nu^2}$$

ist.

Zur Lösung von (40) zerlegen wir $v = v_1 + v_2$ derart, daß

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}, \tag{42}$$

mit

$$\begin{aligned} &t = 0, \; z > 0, \; v_1 = -w(0)\, e^{-\nu z} \\ &t > 0, \; z = 0, \; v_1 = 0 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}, \tag{43}$$

mit

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad z > 0, \quad v_2 = 0, \\ &t > 0, \quad z = 0, \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)_0 = \nu\, w(t). \end{aligned}$$

Die Lösung von (42) folgt leicht aus der allgemeinen Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter der Annahme, daß die Oberflächen-

temperatur beständig auf null Grad gehalten wird; siehe Riemann-Weber ([17], Bd. II, § 37) zu:

$$v_1 = -\frac{w(0)}{2}\left\{e^{a^2\nu^2 t-\nu z}\left[1-\Theta\left(a\nu\sqrt{t}-\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-e^{a^2\nu^2 t+\nu z}\left[1-\Theta\left(a\nu\sqrt{t}+\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\right\}. \tag{44}$$

Zur Lösung von (43) setzen wir schließlich noch:

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = u \tag{45}$$

und erhalten für u die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{46}$$

mit

$$t = 0,\ z > 0,\ u = 0,$$
$$t > 0,\ z = 0,\ u = \nu\, w(t).$$

Ist u ermittelt, so ergibt sich mit sinngemäßen Integrationskonstanten

$$v_2 = -\int_z^x u\, dz. \tag{47}$$

Ist allgemein $u = F(t)$ für $z = 0$, so ergibt die Theorie der Wärmeleitungsgleichung (siehe Riemann-Weber, loc. cit., Bd. II, § 41):

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} F\left(t-\frac{z^2}{4a^2\beta^2}\right) d\beta. \tag{48}$$

Auf unseren Fall angewendet, liefert das, wenn wir für $w(t)$ den Ausdruck (41) einsetzen:

$$u = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\nu M\cdot$$
$$\cdot\left[\sin(Nt+\varphi)\int_{\frac{z}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\cos\frac{Nz^2}{4a^2\beta^2}\, d\beta - \cos(Nt+\varphi)\int_{\frac{z}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\sin\frac{Nz^2}{4a^2\beta^2}\, d\beta\right]. \tag{49}$$

Wir nehmen jetzt an, daß seit Beginn des Einstrahlungsprozesses so lange Zeit verstrichen ist, daß der Ausdruck $\frac{z}{2a\sqrt{t}}$ genügend genau gleich Null gesetzt werden kann. Dann gelingt es mit Hilfe bekannter Integrale (siehe Riemann-Weber, loc. cit., Bd. II, § 43, S. 110) Gleichung (49) zu lösen. Es ist nämlich:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\cos\frac{Nz^2}{4a^2\beta^2}\, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}}\cos\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \tag{50}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2} \sin \frac{N z^2}{4 a^2 \beta^2}\, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \sin \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}, \tag{51}$$

so daß

$$u = -v M \left[\sin (N t + \varphi) e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \cos \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} - \right.$$
$$\left. - \cos (N t + \varphi) e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \sin \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \right] \tag{52}$$

wird. Daraus können wir nun sofort nach (47) v_2 berechnen. Allgemein gelten folgende Formeln (siehe z. B. Laska, § 92, S. 211 (4) und (5):

$$\int e^{a x} \sin b\, x\, dx = e^{a x} \frac{a \sin b\, x - b \cos b\, x}{a^2 + b^2};$$
$$\int e^{a x} \cos b\, x\, dx = e^{a x} \frac{a \cos b\, x + b \sin b\, x}{a^2 + b^2}.$$

Damit wird nach leichten Umformungen

$$v_2 = + \frac{a v M}{\sqrt{2N}} e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \cdot$$
$$\cdot \left[\sin \left(N t + \varphi - \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \right) - \cos \left(N t + \varphi - \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \right) \right]. \tag{53}$$

Das können wir noch zusammenfassen und erhalten schließlich:

$$v_2 = \frac{a v M}{\sqrt{N}} e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \sin \left(N t + \varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \right). \tag{54}$$

Zur gesamten Lösung von (35) mit (36) fassen wir die einzelnen Teillösungen zusammen und bekommen:

$$T = T_1 + v_1 + v_2 + w \cdot e^{-v z}. \tag{55}$$

Mit den bei der Lösung von v_2 getroffenen Vereinfachungen wird $v_1 = 0$ und ebenso vereinfacht sich T_1 nach (22), so daß wir als endgültige Lösung von (35) mit (36) nach hinreichend langer Zeit erhalten:

$$T = T_1 - M e^{-v z} \sin (N t + \varphi) +$$
$$+ \frac{a v M}{\sqrt{N}} e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \sin \left(N t + \varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} \right). \tag{56}$$

Das erste Glied T_1 stellt die Temperaturverteilung dar, um die sich die periodische Schwingung abwickelt. Mit den getroffenen Vereinfachungen $\frac{z}{2a\sqrt{t}} \sim 0$ folgt dafür aus (22), wenn wir noch als Anfangszustand statt $T = 0$ jetzt $T = T_a$ ansetzen:

$$T_1 = T_a + \frac{2a}{k_B \sqrt{\pi}} (i_1 - R) \sqrt{t} - z \frac{(i_1 - R)}{k_B} - \frac{i_1}{k_B v} e^{-v z}. \tag{57}$$

Man erkennt aus (57), daß wir einen stationären Zustand nur dann vorliegen haben, wenn $i_1 = R$ ist. In den anderen Fällen wird unabhängig von den periodischen Gliedern in (56) T_1 mit der Zeit weiter ansteigen oder kleiner werden. Wir müssen uns also zunächst klar werden, welche Bedeutung i_1 besitzt. Nach unserem Ansatz (34) stellt i_1 den tatsächlich vom Schnee absorbierten Strahlungsbetrag dar, der zu Beginn der Periode (im Jahresgang also zu Frühlingsanfang, im Tagesgang um 6 Uhr früh — vorausgesetzt eine zwölfstündige Tageslänge) wirksam ist. Wir entnehmen als Beispiel den Tabellen von Baur und Philipps [*22*] für 40° bis 50° nördl. Br. die unter Berücksichtigung von Trübung und mittlerer Bewölkung der Erdoberfläche am 21. März zugestrahlte Sonnen- und Himmelsstrahlung zu 0,116 + 0,083 cal pro qcm und Minute, also zusammen gleich 0,199 cal pro qcm und Minute. Eine Albedo von 75% vorausgesetzt, würde sich also in diesem Falle $i_1 = 0{,}05$ ergeben. Nach Sauberer (wiedergegeben bei Hann-Süring ([*21*], S. 73) beträgt die effektive Ausstrahlung von Schnee bei einer mittleren Bewölkung von 0 bis 3/10 R = 0,08, bei 4 bis 7/10 R = 0,03, so daß also der obige Wert von $i_1 = 0{,}05$ ziemlich nahe den Betrag der effektiven Ausstrahlung erreichen dürfte. Mithin hätten wir also in diesem Falle in (57) $i_1 = R$ zu setzen und erhielten dann für T_1 den stationären Zustand, um den die periodische (jährliche) Schwingung ausgeführt wird. Wir wollen jetzt zum Vergleich in demselben Beispiel die Verhältnisse beim Erdboden betrachten. Nach Baur und Philipps (wiedergegeben bei Hann-Süring ([*21*], S. 73) beträgt für die betrachtete geographische Breite die mittlere effektive Ausstrahlung im Jahresdurchschnitt $R = 0{,}118$. Da die Albedo des Erdbodens zwischen 10 und 20% anzunehmen ist, würde sich also hier $i_1 = 0{,}169$ ergeben und die Übereinstimmung ist keineswegs erfüllt. Wir wollen diese Verhältnisse beim Erdboden gleich noch näher betrachten. Dazu nehmen wir in (56) eine kleine Umformung der Ausdrücke M und $\frac{a\,\nu\,M}{\sqrt{N}}$ vor. Nach (41) ist

$$M = \frac{i_2\,\nu}{\varrho_B\,c_B} \cdot \frac{1}{\sqrt{N^2 + a^4\,\nu^4}} = \frac{i_2}{\varrho_B\,c_B\,\sqrt{\frac{N^2}{\nu^2} + a^4\,\nu^2}} \tag{58}$$

und

$$\frac{a\,\nu\,M}{\sqrt{N}} = \frac{a\,i_2}{\varrho_B\,c_B\sqrt{N}\,\sqrt{\frac{N^2}{\nu^4} + a^4}}. \tag{59}$$

Unsere Gleichung (56), die für ein beliebiges Medium mit einer (allerdings nicht selektiven) durch den Absorptionskoeffizienten ν dargestellten Absorption gilt, ergibt für $\nu = \infty$ die Verhältnisse im Erdboden. Bei dem Grenzübergang wird nach (58) und (59)

$$M \to 0, \quad \frac{a\,\nu\,M}{\sqrt{N}} \to \frac{i_2}{\sqrt{N\,k_B\,\varrho_B\,c_B}} \tag{60}$$

und weiters nach (41)

$$\operatorname{tg}\varphi \to 0, \quad \varphi = 0. \tag{60a}$$

Somit erhalten wir für den Erdboden

$$T = T_1 + \frac{i_2}{\sqrt{N\, k_B\, \varrho_B\, c_B}}\, e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}} \sin\left(N\,t - \frac{\pi}{4} - \frac{z}{a}\sqrt{\frac{N}{2}}\right), \qquad (61)$$

oder für die Erdoberfläche

$$T_0 = T_a + \frac{2\,a}{k_B\sqrt{\pi}}\,(i_1 - R)\sqrt{t} + \frac{i_2}{\sqrt{N\, k_B\, \varrho_B\, c_B}} \sin\left(N\,t - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (62)$$

Da nach dem oben diskutierten Beispiel $i_1 > R$ ist, würde das also bedeuten, daß neben der Temperaturzunahme durch das periodische Glied mit Beginn von Frühlingsanfang auch noch eine Temperaturzunahme infolge des ersten Gliedes in (62) erfolgen würde. Die Erklärung für diesen scheinbaren Widerspruch findet sich sofort dadurch, daß eben die Erdoberfläche nicht nur durch die (hier als konstant angenommene) effektive Ausstrahlung sich abkühlt, sondern auch noch durch Verdunstung und weiters durch Austausch zur Luft hin. Ja diese Faktoren werden im allgemeinen sogar die effektive Ausstrahlung übertreffen, so daß dann im Gesamteffekt $(i_1 - R)$ minus Abkühlung durch Verdunstung und Austausch negativ wird, was besagt, daß die Amplitude des periodischen Gliedes in (62) verkleinert wird. Wir betrachten jetzt nur das periodische Glied in (62) und vergleichen unsere Lösung mit der von Milankovitsch [*23*] gegebenen Lösung des sogenannten Grundproblems der Klimatologie. Es handelt sich dabei um grundsätzlich dieselbe Aufgabe, die wir uns bei Schnee gestellt haben. Milankovitsch, der als Oberflächenbedingung aber nicht eine konstante effektive Ausstrahlung, sondern eine Schwarzstrahlung (allerdings nicht proportional der vierten Potenz, sondern als Näherung proportional der ersten Potenz) ansetzt, erhält dementsprechend bei sonst gleichem Bau andere Werte für die Amplitude und die Phasenverzögerung. In unserer Schreibweise lautet die Lösung von Milankovitsch:

$$T_0 = \text{stationär} + B \sin(N\,t - \varepsilon). \qquad (63)$$

Für die Phasenverzögerung erhält er bei der täglichen Periode 2,5 Stunden, jedoch bei der jährlichen nur 9 Tage. Er schreibt dazu: „Der erste dieser zwei theoretisch errechneten Werte stimmt mit der Erfahrung gut überein, wenigstens was die Verspätung des täglichen Temperaturmaximums anlangt. Der zweite Wert, d. h. die Verspätung der Temperaturextreme im jährlichen Gang wird in der Wirklichkeit weit überholt. Zur Ergründung dieser Erscheinung muß auch der Einfluß der Atmosphäre in Betracht gezogen werden." Der Beitrag, den die Atmosphäre (bei ruhender Luft!) liefert, wird dann auch von Milankovitsch in Rechnung gezogen, wobei allerdings ein äußerst umfangreicher mathematischer Apparat aufgewendet wird. Das Ergebnis ist dann (loc. cit.) bei der jährlichen Periode eine Verspätung der Temperaturextreme um 23 Tage an Stelle von 9 Tagen. In unserem Ansatz (36) ist dieser Beitrag der Atmosphäre dadurch berücksichtigt, daß wir als Oberflächenbedingung eine konstante effektive Ausstrahlung vorausgesetzt haben. Daß dies weitgehend berechtigt ist,

zeigen die bereits erwähnten Tabellen von Baur und Philipps ([*21*], S. 73). Für den Fall eines stationären Zustandes in (57) ergibt unsere Formel (62) eine Phasenverzögerung von $\frac{\pi}{4}$, also in der täglichen Periode um 3 Stunden und in der jährlichen um $1^1/_2$ Monate. Der Unterschied zu den Werten von Milankovitsch ist also im täglichen Gang nicht beträchtlich und entspricht daher auch der Erfahrung, während im jährlichen Gang etwa der doppelte Betrag resultiert.

Um einen direkten Vergleich mit den Werten von Milankovitsch durchführen zu können, berechnen wir jetzt auch noch für das früher schon herangezogene Beispiel einer geographischen Breite von 40 bis 50° N die Amplitude. Wir haben S. 86 angegeben, daß nach den Tabellen von Baur und Philipps [*22*] dafür am 21. März die zugestrahlte Sonnen- und Himmelsstrahlung den Betrag von durchschnittlich 0,199 cal pro qcm und Minute hat, also unser i_1 in (34) bei einer Albedo von 15% mit $i_1 = 0{,}169$ cal pro qcm und Minute anzusetzen wäre. Aus denselben Tabellen entnehmen wir für den 21. Juni einen Wert von Sonnen- plus Himmelsstrahlung zu 0,309 oder wieder bei 15% Albedo 0,261 cal pro qcm und Minute. Damit wird dann unser i_2 in (34) gleich $0{,}261 - 0{,}169 = 0{,}092$. Nehmen wir weiters nach Milankovitsch (a. a. O., S. A 95) als Mittelwerte für felsigen Boden im cm g Min-System

$$a^2 = 1{,}00, \quad \varrho_B c_B = 0{,}50, \quad k_B = 0{,}50, \tag{64}$$

so können wir nach (62) die Amplitude unserer periodischen Schwingung für diesen Fall berechnen. Wir erhalten demnach:

$$\frac{i_2}{\sqrt{N k_B \varrho_B c_B}} = \frac{0{,}092}{3{,}46 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5} = 53. \tag{65}$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen. Unsere Formel (56) liefert für den Spezialfall eines strahlungsundurchlässigen felsigen Erdbodens für 40 bis 50° nördl. Br.

1. eine Verspätung des jährlichen Temperaturextrems um $1^1/_2$ Monate;
2. bei 15% Albedo eine halbe Amplitude von 53° C. Vorausgesetzt ist dabei ein stationärer Zustand zu Frühlingsbeginn $i_1 = R$.

Der Amplitudenwert erscheint im ersten Moment unerhört hoch und außerhalb jeder Erfahrung zu liegen. Wir müssen aber bedenken, daß es sich erstens um die Temperatur auf der Erdbodenoberfläche handelt und nicht etwa die Lufttemperatur darunter zu verstehen ist. Weiters ist bei Berechnung der Amplitude nicht die Wärmeabgabe Boden—Luft berücksichtigt und schließlich ist auch die Albedo nicht das ganze Jahr hindurch so niedrig anzusetzen. Besonders ist, wie ja bereits erwähnt, im Falle einer winterlichen Schneedecke die Albedo äußerst groß. Wird die Wärmeabgabe an die Luft so berücksichtigt, daß der stationäre Zustand zu Frühlingsbeginn nicht erfüllt ist, sondern in (57) R größer als i_1 angesetzt wird, so tritt eine mit der Wurzel aus der Zeit t proportionale Temperaturabnahme additiv zu dem periodischen Glied hinzu und wir erhielten dann auch nicht so einen großen Wert für das sommerliche Temperaturextrem (siehe dazu Möller [*24*]).

Milankovitsch erhält loc. cit. für 43° nördl. Br. 1. eine Verspätung der Temperaturextreme um 23 Tage und 2. eine halbe Amplitude von 26,6°.

Aus den erwähnten Gründen muß bei der Überprüfung der Theorie an Hand von Beobachtungen ein Gebiet betrachtet werden, wo Advektionsvorgänge nicht eine überragende Bedeutung spielen. Bei Hann-Süring ([21], S. 100) finden sich die Bodentemperaturen von Tiflis im Jahresverlauf wiedergegeben. Daraus ist zu entnehmen, daß die mittlere Jahresschwankung an der Bodenoberfläche 32,5° und die mittlere Schwankung der (absoluten) Temperaturextreme 72,7° beträgt und daß das Maximum Anfang August erreicht wird. Die Verspätung des sommerlichen Temperaturextrems würde also gut mit unserer theoretischen Phasenverzögerung um $1^1/_2$ Monate übereinstimmen, während Milankovitsch mit 23 Tagen einen zu kleinen Betrag erhält. Was die Temperaturamplitude anlangt, so liegen die beobachteten Werte naturgemäß unter den theoretischen, wie aus den früher auseinandergesetzten Gründen ja nur verständlich ist. Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß unsere Formel (56), die unter der einfachen Oberflächenbedingung einer konstanten effektiven Ausstrahlung abgeleitet ist, den tatsächlichen Verhältnissen weitgehend gerecht wird und noch den Vorteil besitzt, für ein beliebiges strahlungsdurchlässiges Medium (dargestellt durch den Absorptionskoeffizienten ν) zu gelten, wobei sich die Verhältnisse im Erdboden als Grenzübergang für $\nu = \infty$ ergeben.

Wir kehren also jetzt wieder zu dem Fall $\nu =$ endlich zurück und bekommen so durch Vergleich von (56) mit (61) sofort die Unterschiede zwischen den Verhältnissen beim Schnee und beim Erdboden. Uns interessiert zunächst weniger, inwieweit die Sonneneinstrahlung eine periodische Temperaturänderung hervorruft, mit welcher Amplitude und welcher Phasenverzögerung, sondern wir wollen unser Augenmerk darauf richten, wie sich beim Schnee die auf der Oberfläche entstandene Temperaturänderung in die Tiefe fortpflanzt. Im Falle des Erdbodens ergibt sich nach (61) die bekannte Poissonsche Formel, die besagt, daß die Abnahme der Amplitude im geometrischen Verhältnis erfolgt, wenn die Tiefe im arithmetischem Verhältnis wächst. Beim Schnee tritt nun, wie ein Vergleich von (61) mit (56) lehrt, neben dieser fortschreitenden Welle noch eine stehende Welle auf, deren Amplitude nach der Tiefe zu mit $e^{-\nu z}$ abnimmt. Weiters tritt jetzt an der Oberfläche und in der Tiefe im Vergleich zum Erdboden eine zusätzliche Phasenverschiebung gegenüber der periodischen Einstrahlung auf, deren Betrag nach (41) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{a^2\nu^2}$ ist. An der Oberfläche haben wir also erstens eine Schwingung mit der Amplitude M und der Phasenverschiebung φ und eine zweite mit der Amplitude $\frac{a\nu M}{\sqrt{N}}$ und der Phasenverschiebung $\varphi - \frac{\pi}{4}$. Wir rechnen nun zunächst für die jährliche Periode ein numerisches Beispiel durch mit Erfahrungswerten für a und ν. Bei einer Schneedecke, die das ganze Jahr über liegenbleibt, haben wir sicherlich mit Dichtewerten von 0,4 bis 0,45 zu rechnen (siehe dazu Keränen ([4], S. 284) oder Sorge ([25],

S. 238). Nach der Formel (2) mit (1) wird dann für $\varrho_B = 0{,}45$ $a^2 = 0{,}365$ im cm g Min-System und daher für die jährliche Periode mit dem im Abschnitt II als Durchschnittswert genommenen Betrag von $\nu = 0{,}15$

$$\frac{a\nu}{\sqrt{N}} = 26{,}2. \tag{66}$$

Das besagt also, daß in diesem Falle die Amplitude der fortschreitenden Welle das 26fache derjenigen der stehenden Welle beträgt. Weiters erhalten wir in unserem Falle noch für

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{a^2\nu^2} = 0{,}00146 \sim \varphi. \tag{67}$$

Das würde einer Phasenverschiebung von 2 Stunden gegenüber der aus $\frac{\pi}{4}$ folgenden von $1^1/_2$ Monaten entsprechen und ist also gegen $\frac{\pi}{4}$ vollkommen zu vernachlässigen. Da schließlich noch das logarithmische Dekrement der Amplitude der fortschreitenden Welle in unserem Falle

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{N}{2}} = 0{,}00286 \tag{68}$$

wird, während die stehende Welle ein solches von $\nu = 0{,}15$ besitzt, so erhalten wir den Satz:

Bei dem jährlichen periodischen Temperaturvorgang ist unter normalen Verhältnissen die Poissonsche Formel für die Fortpflanzung der Temperaturwellen von der Oberfläche in die Tiefe auch bei einer Schneedecke praktisch anwendbar.

Wie stehen nun die Verhältnisse bei der täglichen Periode? Hier rechnen wir mit einer durchschnittlichen Dichte von 0,2. Verwenden wir wieder die Formel (2) und setzen $c_B = 0{,}504$, so wird $a^2 = 0{,}0027$ in c. g. s.-Einheiten und damit

$$\frac{a\nu}{\sqrt{N}} = 0{,}99 \tag{69}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = 1{,}2,\ \varphi = 0{,}88.$$

Rechnen wir mit einer siebenfach so großen Wärmeleitfähigkeit aus den Gründen, die wir im Abschnitt I und II auseinandergesetzt haben, so wird:

$$\frac{a\nu}{\sqrt{N}} = 2{,}6 \tag{70}$$

und

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}171,\ \varphi = 0{,}17.$$

Man sieht also aus (69) und (70), daß jetzt die Amplitude der stehenden Welle keineswegs mehr gegenüber der fortschreitenden vernachlässigt werden kann und desgleichen die Phasenverschiebung in die Größenordnung von $\frac{\pi}{4}$ fällt, so daß wir hier den Satz erhalten:

Bei der täglichen Periode ist die Poissonsche Formel für die Fortpflanzung der Temperaturwellen von der Oberfläche in die Tiefe bei einer Schneedecke und allgemein bei einem strahlungsdurchlässigen Medium nicht anwendbar.

Und weiter:

Bei der täglichen Periode liegen auch bezüglich der Verzögerung der Temperaturextreme im Vergleich zur periodischen Einstrahlung sowie bei der durch die Einstrahlung bedingten Temperaturamplitude auf einer Schneeoberfläche grundsätzlich andere Verhältnisse vor als beim Erdboden.

Im Einzelfall ist also bei einer Schneedecke nicht eine Gleichung der Form (61), sondern unsere allgemeine für ein beliebiges ν geltende Gleichung (56) anzuwenden. Da die stehende Welle in (56) eine negative Amplitude hat, wird die auf einer Schneeoberfläche durch die Einstrahlung hervorgerufene und mit der Tiefe fortschreitende Welle geschwächt. Man wird also im allgemeinen eine raschere Abnahme der Amplitude mit der Tiefe erhalten, wie beim Erdboden nach (61). Dagegen ist in der Verzögerung des Eintrittes der Temperaturextreme, also in der Phasenverschiebung einer in die Tiefe fortschreitenden Welle gegenüber der Oberflächenwelle der Unterschied zu (61) nicht so groß. Wendet man daher die Formel (61), die für den Erdboden streng gilt, auf die Verhältnisse in einer Schneedecke an, so ist zu erwarten, daß die aus der Verringerung der Amplitude berechneten Wärmeleitfähigkeiten zu kleine Beträge ergeben müssen, während man bei einer Berechnung aus der Phasenverzögerung den wirklichen Verhältnissen eher Rechnung trägt. Wir haben in der Einleitung erwähnt, daß schon Keränen ([*4*], S. 285) die Tatsache besonders hervorhebt, daß die aus den Amplituden des täglichen Temperaturganges berechneten Werte der Wärmeleitfähigkeit durchschnittlich nur halb so groß sind, wie die aus den Phasenzeiten sich ergebenden. Wir sehen hier, daß dies seine Ursache darin findet, daß die für den Erdboden als praktisch undurchlässigem Medium geltende Formel (61) beim Schnee nicht mehr anwendbar ist. Es erweist sich also als unerläßlich, die von Abels und anderen auf Grund der einfachen Poissonschen Formel bestimmten Wärmeleitfähigkeiten im Sinne einer eingehenden Theorie nach Gleichung (56) einer Revision zu unterziehen, wobei allerdings die Größe des Absorptionskoeffizienten bekannt sein muß. Eine derartige Neuauswertung des in einer Schneedecke beobachteten täglichen Temperaturganges zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit würde aber den Rahmen dieser Arbeit übersteigen und wir begnügen uns hier mit diesem Hinweis.

Literaturverzeichnis.

1. Schreiber, P.: Studien über Erdbodenwärme und Schneedecke. Jb. Sächs. Meteorol. Inst., Chemnitz **1901**, 90ff.
2. Schmidt, Ad.: Theoretische Verwertung der Königsberger Bodentemperaturbeobachtungen. Schr. Königs. phys.-ökon. Ges. **32**, 115 (1891).
3. Anderko, A. v.: Die Wärmebewegungen im pseudoisotropen Erdboden. Met. Z. **1913**, 581.

4. Keränen, J.: Wärme und Temperaturverhältnisse der obersten Bodenschichten. Naturw. Monographien u. Lehrb. **8**, II. Teil, 169ff. (1929). Berlin: Julius Springer.
5. Eckel u. Thams: Untersuchungen über Dichte-, Temperatur- und Strahlungsverhältnisse der Schneedecke in Davos. Geologie d. Schweiz, Hydrologie, **1939**, Lief. 3, 275—340.
6. Abels, H.: Beobachtungen der täglichen Periode der Temperatur im Schnee und Bestimmung des Wärmeleitvermögens des Schnees als Funktion der Dichte. Rep. Meteor. Petersburg **16**, Nr. 1, 31, 32 (1892).
7. Jansson, M.: Über die Wärmeleitfähigkeit des Schnees. Ofers. Akad. Stockholm **1901**, Nr. 3, 220.
8. Devaux, J.: L'économie radio-termique des champs de neige et des glaciers. Ann. Physique **20**, Nr. 2 (1933).
9. Falckenberg, G.: Absorptionskonstanten einiger meteorologisch wichtiger Körper für infrarote Wellen. Met. Z. **45**, 334 (1928).
10. Devaux, J.: Etude de l'albedo de la neige dans le spectre infra-rouge. C. R. Acad. Sci., Paris **80** (1935).
11. Sauberer, F.: Versuche über Messungen der Strahlungseigenschaften von Schnee und Eis mit Photoelementen. Met. Z. **55**, H. 7 (1938).
12. Aschkinass, E.: Untersuchungen des Absorptionsspektrums von Wasser. Wied. Ann. **55**, 401 (1895).
13. Reuter, H.: Zur Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht und Ausbildung der Bodeninversion. S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **155**, Heft 7 u. 8, 333ff. (1947).
14. Brunt, D.: Physical and dynamical Meteorology. Cambridge 1944, S. 139ff.
15. Philipps: Zur Theorie der Wärmestrahlung in Bodennähe. Gerlands Beitr. Geophys. **56**, 229—319 (1940).
16. Bader, H.: Mineralogische und strukturelle Charakterisierung des Schnees und seiner Metamorphose, aus: Geologie d. Schweiz, Hydrologie, **1939**, 31ff., Lief. 3.
17. Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. **I** u. **II**. Braunschweig 1901.
18. Niederdorfer: Messungen des Wärmeumsatzes über schneebedeckten Boden. Met. Z. **50**, 201 (1933).
19. Emden, R.: Zum Temperaturproblem der Seen. Helv. Phys. Acta **8**, Fasc. V, 396ff. (1940).
20. Laska: Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. Braunschweig 1894.
21. Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie, 5. Aufl. Leipzig 1937.
22. Baur u. Philipps: Der Wärmehaushalt der Lufthülle der Nordhalbkugel im Januar, Juli und zur Zeit der Äquinoktien und Solstitien. Gerlands Beitr. Geophys. **42**, 160 (1934).
23. Milankovitsch: Mathematische Klimalehre. Handb. Klimat. **1**, A 107—113.
24. Möller, F.: Energetische Klimatologie. Gerlands Beitr. Geophys. **42**, 252 (1934).
25. Sorge: Glaziologische Beobachtungen in Eismitte. Wiss. Erg. d. Deutsch. Grönlandexpedition Alfred Wegener **III**, 238ff.
26. Wexler: Cooling in the lower atmosphere and the structure of polar continental air. Mon. Weather Rev. **64**, 122—136 (1936).

551.510.535 (98) : 551.506.7

(Ionosphärenstation der Universität Graz.)

Ionosphärenbeobachtungen im Polargebiet.

Von

O. Burkard.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die vom Juni 1944 bis zum April 1945 in Tromsö gewonnenen Beobachtungen an der F-Schicht der Ionosphäre werden mitgeteilt und einer kritischen Betrachtung unterzogen. Einer solchen Untersuchung kommt eine besondere Bedeutung schon dadurch zu, daß der Beobachtungsort nahe dem Gebiet stärkster Nordlichttätigkeit liegt, dann aber auch in bezug auf die vielen Funkverbindungen, bei denen die Radiowellen ihren Ausbreitungsweg über dieses Gebiet nehmen. Es ergab sich, daß in den Sommermonaten die kritische Frequenz nahezu konstant bleibt, während sie in den Wintermonaten einen sehr deutlich ausgeprägten Gang mit dem jeweiligen Sonnenstand (in der Schichthöhe) zeigt. Im Zusammenhang mit magnetischen Störungen und Nordlichtern nimmt die kritische Frequenz je nach der Störungsstärke ab oder aber — bei Störungen größeren Ausmaßes — es wird überhaupt keine Reflexion mehr von der F-Schicht erhalten. Nur zum Teil liegt dies an der absorbierenden bzw. abschirmenden Wirkung der tieferen Schichten, zum anderen Teil tritt sicherlich ein „Abbau" der Schichtionisation ein, der besonders deutlich in den Vormittagsstunden nach magnetischen Störungen beobachtet werden kann. Für den Funkverkehr von Wichtigkeit ist schließlich auch die Feststellung, daß selbst an magnetisch ruhigen Tagen nur während der Sonnenscheindauer mit Sicherheit ein Funkverkehr über die F-Schicht durchgeführt werden kann, weil zu anderen Zeiten häufig die Reflexionen von dieser Schicht ausbleiben. Auf das Auftreten der sporadischen F-Schicht wird zum Schluß hingewiesen.

Summary. The observations on the F-layer of the ionosphere obtained in Tromsö from June 1944 to April 1945 are communicated and critically viewed. Such an investigation is of particular importance the place of observation being situated near the region of greatest activity of auroras, but also in relation to the many wireless communications the radio-waves of which are spreading over this region. It resulted that during the summer months the critical frequency remains almost constant whereas it shows a very distinct variation with the sun's altitude (in the height of the layer) during the winter months. In connection with magnetic disturbances and auroras the critical frequency is decreasing according to the strength

of disturbance or — with disturbances of a greater extent — no reflection at all is obtained from the F-layer. This is only partially due to the absorbing or sheltering effect of the lower layers, on the other hand certainly a „reduction" of the layer ionisation is taking place which may be observed with particular distinctness during the morning hours after magnetic disturbances. Finally the ascertainment is of importance for the radio traffic that even on magnetically quiet days a wireless communication over the F-layer is with certainty only possible during the time of sunshine, because at other times the reflections from this layer frequently do not take place. At the end it is referred to the appearance of the sporadic F-layer.

Résumé. Les observations sur la couche F de l'ionosphère faites à Tromsö dès juin 1944 jusqu'en avril 1945 sont communiquées et critiquées. Une telle recherche est d'une importance particulière parce que le lieu d'observation est proche de la région de la plus grande activité des aurores boréales, mais aussi par rapport aux nombreuses radio-communications dont les ondes hertziennes se répandent dans cette région. Il a été prouvé que la fréquence critique reste presque constante pendant les mois d'été et présente une variation très nette avec la hauteur solaire (au niveau de la couche) pendant les mois d'hiver. En connexion avec les perturbations magnétiques et les aurores boréales la fréquence critique diminue selon la force de la perturbation ou — dans le cas des perturbations de plus grande étendue — aucune réflexion n'est obtenue de la couche F. Cela résulte en partie de l'effet absorbant ou abritant des couches plus basses, d'autre part une „réduction" de l'ionisation de la couche a lieu certainement qui peut être observée très distinctement dans la matinée après des perturbations magnétiques. Enfin pour la télégraphie sans fil la constatation est d'importance que même aux jours d'un calme magnétique la radiotélégraphie par la couche F n'est réalisable avec sûreté que pendant l'insolation parce sans cela les réflexions par cette couche manquent fréquemment. A la fin de l'étude on signale l'apparition de la couche F sporadique.

Unser derzeitiges Wissen über das Verhalten der Ionosphäre in hohen Breiten verdanken wir neben einem zusammenfassenden Bericht über die Beobachtungen während des Internationalen Polarjahres 1932/33 von Appleton [*1*] fast ausschließlich der jahrelangen, umfangreichen Beobachtungstätigkeit Harangs, die in mehreren ausführlichen Berichten [*2*] ihren Niederschlag gefunden hat. Wenn ich nun trotzdem es wage, nochmals auf dieses Thema zurückzukommen und im folgenden über eigene Beobachtungen an der F-Schicht der Ionosphäre berichte, so deshalb, weil ich glaube, damit nicht nur die bereits von Harang aufgezeigten Verhältnisse bestätigen, sondern darüber hinaus auch noch einige neue Gesichtspunkte ins Treffen führen zu können.

Die Messungen, über die hier berichtet werden soll, wurden an einer kleinen magnetisch-ionosphärischen Beobachtungsstation gewonnen, die während des Krieges in Tromsö (69,6° n. Br.) errichtet worden war und in den letzten Kriegsmonaten unter meiner wissenschaftlichen Leitung stand. Sie hatte die Aufgabe, Beobachtungsmaterial für die Funkberatung von Wehrmachtsstellen zu liefern und war ein Bestandteil des jetzigen Fraunhofer-Instituts, das jetzt in Lindau am Harz bzw. in Freiburg im Breisgau Ionosphärenforschung betreibt. Für die iono-

sphärischen Messungen stand an der genannten Station unter anderen ein größerer Impulssender mit veränderlicher Frequenz (Bereich etwa 0,8 bis 11,4 MHz) und einer Impulsleistung von rund 50 kW zur Verfügung; der zugehörige Empfänger war nur wenige Meter vom Sender entfernt untergebracht und wurde jeweils mit der Hand auf die Senderfrequenz nachgestimmt.

Über den Tagesverlauf der kritischen Frequenz der F-Schicht in so hohen Breiten gibt es, soweit ich bereits Einblick in die Kriegs- und Nachkriegsveröffentlichungen des Auslandes nehmen konnte, noch keinerlei genauere Angaben. Und doch ist diese Frage von recht großem Interesse, gehen ja eine ganze Reihe von Funkverbindungen über die Polkappe hinweg, und für ihr Funktionieren muß in erster Linie das Verhalten der F-Schicht in polaren Gegenden verantwortlich gemacht werden. Es dürfte sich aber vielleicht auch ein Vergleich der kritischen Frequenzen in niederen Breiten (wie sie bereits von vielen Stationen veröffentlicht werden) mit denen in hohen Breiten insofern lohnen, als man daraus Rückschlüsse auf die Ionisierungsursachen und auf die in der F-Schicht anzusetzende Ionisierungsbilanz ziehen wird können. In der Tabelle 1 sind die stündlichen Werte der kritischen Frequenz f°_{2F}

Tabelle 1. *Stündliche Monatsmittelwerte der kritischen Frequenz* $f^{\circ}_{F_2}$ *in Tromsö.*

MEZ.	1944							1945			
	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jan.	Feb.	März	April
0	3,95	3,90	3,39	2,98	2,8	2,62	2,8	3,16	3,13	3,54	3,69
1	4,00	3,80	3,40	3,17	2,8	2,72	3,2	2,93	2,66	3,23	3,58
2	3,92	3,96	3,26	3,06	3,1	3,06	3,3	3,54	2,98	2,20	3,47
3	3,90	3,89	3,30	2,72	3,1	2,87	2,8	2,85	2,72	2,50	3,23
4	3,87	3,87	3,25	2,78	2,7	2,97	2,6	2,89	2,96	2,52	3,49
5	3,92	3,90	3,53	3,12	2,4	2,50	2,2	2,24	2,80	2,74	3,84
6	4,00	3,99	3,78	3,60	2,5	2,62	2,1	2,08	2,30	3,18	4,08
7	4,10	4,14	4,09	3,88	3,3	2,61	1,6	1,70	2,88	3,70	4,36
8	4,16	4,31	4,16	4,13	4,1	2,74	2,2	1,73	3,54	4,02	4,63
9	4,25	4,26	4,26	4,31	4,6	3,61	2,4	2,89	3,99	4,45	4,85
10	4,35	4,33	4,35	4,40	4,7	4,05	3,4	3,79	4,57	4,46	5,15
11	4,25	4,30	4,40	4,46	4,6	4,31	3,8	4,50	4,91	4,67	5,05
12	4,25	4,23	4,35	4,50	4,8	4,33	4,1	4,70	5,25	4,75	5,06
13	4,25	4,24	4,34	4,48	4,8	4,09	3,7	4,61	5,20	5,01	5,02
14	4,20	4,25	4,27	4,40	4,5	4,05	3,1	4,18	4,94	4,77	5,06
15	4,25	4,20	4,31	4,41	4,5	3,48	3,0	3,82	4,70	4,76	4,92
16	4,10	4,19	4,27	4,30	4,2	3,14	1,7	3,15	4,16	4,42	4,92
17	4,20	4,22	4,26	4,25	4,4	2,75	2,7	2,48	3,84	4,16	4,84
18	4,20	4,17	4,10	4,05	3,7	2,32	3,1	2,28	3,12	3,76	4,66
19	4,24	4,10	3,95	3,90	3,6	2,56	3,1	3,36	3,22	3,84	4,55
20	4,09	4,10	3,89	3,72	3,6	2,27	4,2	3,58	2,75	3,53	4,31
21	3,98	4,00	3,70	3,47	3,8	2,61	3,2	3,65	3,05	3,00	4,20
22	3,94	4,02	3,70	3,48	3,5	2,60	3,3	3,05	3,35	3,37	4,12
23	3,86	3,90	3,48	3,18	3,0	2,53	3,2	3,68	3,75	3,45	3,83

für die Zeit vom Juni 1944 bis zum April 1945 als Monatsmittel eingetragen, um so diese Ergebnisse auch etwaigen anderen Untersuchungen zugänglich zu machen. Hiezu sei jedoch erwähnt, daß in den Monaten Oktober und Dezember infolge technischer Störungen am Sender an einer

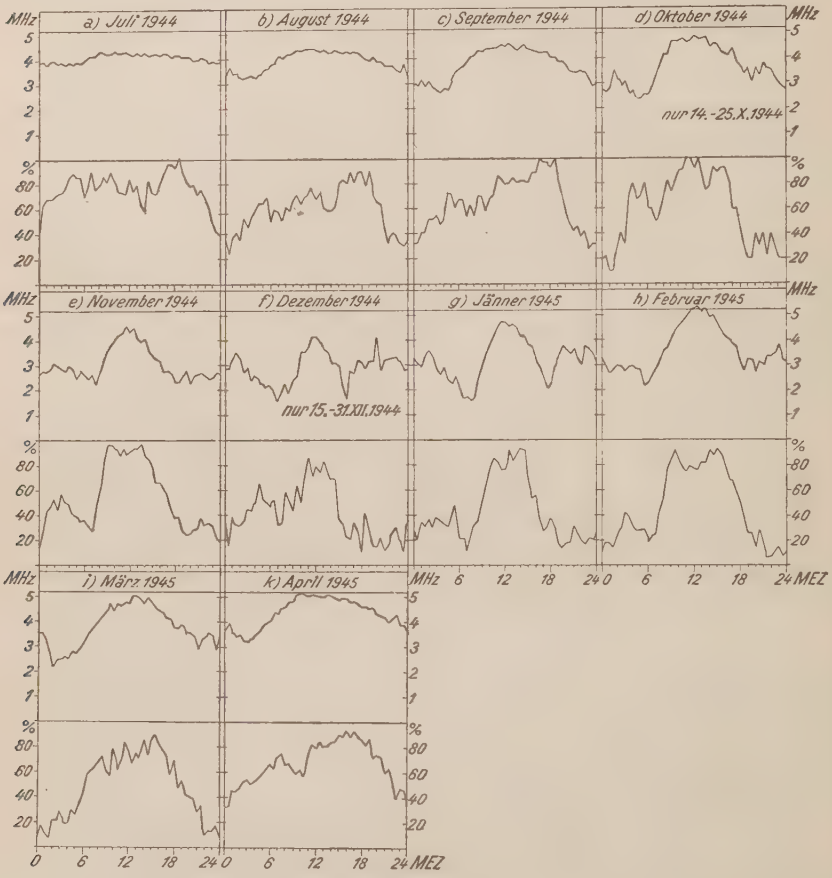


Abb. 1*a* bis *k*. Die kritische Frequenz der *F*-Schicht (obere Kurve) und die Häufigkeit einer Reflexion von Zeichen an ihr (untere Kurve) für Juli 1944 bis April 1945.

größeren Zahl von Tagen die Messungen ausfielen, so daß die Mittelwerte weniger genau sind als in den anderen Monaten.

Anschaulicher als die Zahlenreihen lassen uns die Abbildungen 1*a* bis 1*k* den Tagesverlauf der kritischen Frequenz verfolgen, und wir erkennen insbesondere in den Wintermonaten den sehr engen Zusammenhang mit dem jeweiligen Sonnenstand, wobei noch bemerkt sei, daß zwar in Tromsö selbst mehr als zwei Monate hindurch Polarnacht herrscht, daß aber in der Höhe der Schicht wohl auch in den Wintermonaten mit

Sonnenbestrahlung gerechnet werden kann. Übereinstimmend mit früheren Beobachtungen findet sich auch wieder bezüglich der Mittagswerte ein Maximum im Monat Oktober sowie im Februar. Das auffallendste Verhalten aber finden wir in den Sommermonaten, in denen der sonnenstandbedingte Verlauf immer mehr und mehr verflacht, so daß im Juli z. B. die kritische Frequenz über die ganzen 24 Stunden des Tages hindurch fast denselben Wert beibehält. Wenn auch die Sonnenstrahlung im Polarsommer diese ganze Zeit hindurch vorhanden ist, so ist doch der Cosinus ihres Einfallswinkels ziemlich beträchtlich veränderlich, so daß dieser Befund nicht mit der einfachen Schichttheorie in Einklang zu bringen ist. Ich habe auf diese Beobachtung schon einmal hingewiesen und auch versucht, sie durch entsprechende Annahmen über die Schichtbildung zu erklären. [*3*]

So einfach nun auch diese Kurven für die kritische Frequenz in ihrem jahres- und tageszeitlichen Verlauf erscheinen mögen, so wenig geben sie für sich allein schon ein Bild von den tatsächlichen Verhältnissen in der polaren *F*-Schicht. Man darf vor allem nicht aus den Augen verlieren, daß gerade die in Betracht gezogene Zeit in ein Sonnenfleckenminimum fällt und wohl infolge der hiedurch bedingten geringen erdmagnetischen Störtätigkeit sind auch die ionosphärischen Messungen verhältnismäßig nur wenig gestört. Ich halte es aber z. B. für recht zweifelhaft, ob es gelingen würde, in Jahren eines Sonnenfleckenmaximums für die Wintermonate überhaupt irgend welche Monatsmittel angeben zu können. Denn gerade in den Wintermonaten ist die kritische Frequenz für magnetische Störungen sehr empfindlich und schon Harang hat beobachtet, daß im Gefolge einer solchen Störung die *F*-Schicht unter Umständen überhaupt keine Echos mehr ergibt, was nur zum geringen Teil auf Dämpfungserscheinungen zurückzuführen sein mag. Denn in Fällen magnetischer Störungen mittlerer Stärke tritt lediglich ein Absinken der kritischen Frequenzen ein, wie ich später noch an zwei besonderen Beispielen zeigen will. Hierbei liegen die Dinge meist so, daß in Tromsö die erdmagnetischen Störungen in den Nachmittagsstunden beginnen. In der *F*-Schicht macht sich eine solche (vorübergehende) Störung gleichzeitig, dann aber vor allem auch am darauffolgenden Vormittag deutlich bemerkbar. Bei Störungen geringeren Ausmaßes sinkt die kritische Frequenz mehr oder weniger stark unter den Normalwert und bei Störungen größeren Ausmaßes wird dann insbesondere in den Vormittagsstunden der Wintermonate überhaupt keine Reflexion mehr von der *F*-Schicht erhalten. Erst in den Nachmittagsstunden treten wieder Reflexionen ein. Daß dieses Verhalten jedoch nicht ausschließlich auf Dämpfungserscheinungen — was ja naheliegen würde — zurückzuführen ist, kann man auch noch daraus schließen, daß die kritische Frequenz nach solchen Störungen nicht sofort wieder in ihrer alten Höhe gemessen wird, sondern daß sie erst allmählich auf diesen Wert ansteigt.

Für zwei besonders charakteristische Fälle, nämlich für den Monat September 1944 und für März 1945 zeigen die Abb. 2 und 3 den Einfluß magnetischer Störungen auf die kritische Frequenz. Entsprechend dem oben erwähnten Störungsbeginn, häufig am Nachmittag, wurde die Zeit-

achse bei den Diagrammen so gewählt, daß sie mit 12 Uhr MEZ. beginnt und am nächsten Mittag endet. Die beiden übereinander eingetragenen Kurven stellen nun die kritische Frequenz der F-Schicht dar, und zwar die obere Kurve an den fünf magnetisch ruhigsten Tagen, die untere Kurve an den fünf magnetisch gestörtesten Tagen. Allerdings wurde abweichend von den früheren Abbildungen nunmehr die Mittelbildung so durchgeführt, daß auch alle jene Fälle, bei denen keine Reflexionen festgestellt werden konnten, in die Mittelbildung mit dem Frequenzwert Null einbezogen worden sind. Da außerdem infolge der natürlichen Streuung der Meßwerte bei einer Mittelung über nur fünf Tage der Kurven-

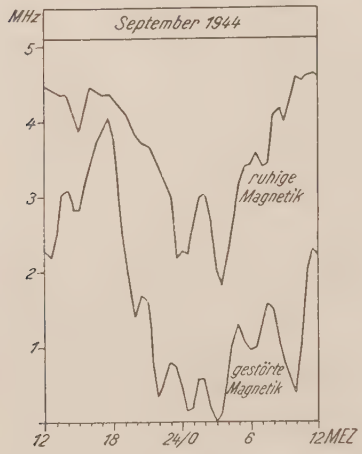


Abb. 2 und 3. Mittelwerte für die kritische Frequenz f^0F_2 an erdmagnetisch ruhigen und an gestörten Tagen in Tromsö.

verlauf unnötig „unruhig" wird, wurden jeweils ausgeglichene Mittelwerte eingetragen, derart, daß — in üblicher Weise — der vorangehende und der unmittelbar nachfolgende Meßwert mit halbem Gewicht mitberücksichtigt wurde. Im allgemeinen verlaufen diese beiden Kurven ziemlich parallel zueinander, am Nachmittag (also unter Umständen vor dem Störungsbeginn) mit etwas geringerem Unterschied in den kritischen Frequenzen als am darauffolgenden Vormittag, wo sich eben der Störungseinfluß am stärksten auswirkt. Bemerkenswert vielleicht auch der etwa zwischen 5 oder 6 Uhr morgens beginnende Anstieg der kritischen Frequenz an gestörten Tagen, dem dann aber doch ein nochmaliger starker Abfall, oft bis zum gänzlichen Fehlen der Reflexionen, folgt.

Will man die zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten verschieden stark ausgeprägte Störanfälligkeit der F-Schicht gegenüber den magnetischen Störungen (womit im übrigen noch kein *ursächlicher* Zusammenhang festgestellt sein soll) rein zahlenmäßig zum Ausdruck bringen, so untersucht man am besten die Häufigkeit, mit der — bezogen auf die Gesamtzahl von Beobachtungen — eine Reflexion von der F-Schicht

zu irgend einem gleichbleibenden Tageszeitpunkt erhalten werden kann. Es erweist sich eine derartige Untersuchung nebstbei auch für die Fragen der Funkberatung, der ja auch im Frieden volle Bedeutung zukommt, von großer Wichtigkeit. Es wurden daher im unteren Teil der Abb. 1*a* bis 1*k* diese Häufigkeiten in halbstündigen Intervallen eingetragen und nun ergibt sich, daß selbst zu so ungestörten Zeiten, wie sie im Sonnenfleckenminimum beobachtet werden, nur ganz selten Werte über 90% Häufigkeit auftreten. Ganz besonders auffällig ist aber die Tatsache, daß auch in den Häufigkeitskurven sehr scharf der Zusammenhang mit dem jeweiligen Sonnenstand zutage tritt. Fast genau parallel mit dem Ansteigen der kritischen Frequenz am Morgen steigt auch die Häufigkeit von etwa 20 bis 30% bis auf 80 und mehr Prozent zu den Mittagsstunden, um am Nachmittag auch wieder parallel mit dem Abnehmen der kritischen Frequenz abzusinken. Man kann also wohl nur zu den Zeiten höheren Sonnenstandes mit einiger Sicherheit das Vorhandensein einer brauchbaren *F*-Schicht annehmen, was naturgemäß bei Fragen der Funkverbindungsmöglichkeit über polare Gebiete hinweg entsprechende Berücksichtigung finden muß, will man hier vor Fehlschlägen sicher sein, und vor allem in den Wintermonaten muß man damit rechnen, daß auch bei ziemlich geringer magnetischer Störungstätigkeit doch nur durch wenige Stunden hindurch ein Funkverkehr über die *F*-Schicht aufrechterhalten werden kann.

Recht interessant ist bei den gezeigten Häufigkeitskurven das Auftreten eines zweiten Maximums in den frühesten Morgenstunden, wie es etwa am deutlichsten im November, Januar und Februar zum Vorschein kommt. Die gleichzeitige Grenzfrequenz liegt dabei meist in der Größe von rund 3 MHz und durch Echolotungen mit einem Sender auf unveränderlicher Frequenz (etwa 3,6 MHz) konnten Registrierungen erhalten werden, die den Schluß ziemlich zwingend erscheinen lassen, es handle sich hier um eine *F*-Schicht, die durch eine andere Ionisierungsursache zustande kommt, als die normale, tagsüber bestehende *F*-Schicht. Wegen ihres nur zeitweiligen Vorhandenseins habe ich sie sporadische *F*-Schicht genannt [*4*]. Ich halte es auch für durchaus wahrscheinlich, daß der früher erwähnte morgendliche Anstieg der kritischen Frequenz an gestörten Tagen in den Morgenstunden (Abb. 3 z. B. zwischen 7 u. 8 Uhr) dieser sporadischen *F*-Schicht zuzuschreiben ist, ihr Auftreten scheint von den erdmagnetischen Verhältnissen nicht oder nur unbedeutend beeinflußt zu werden.

Literaturverzeichnis.

1. Appleton, E. V., R. Naismith u. G. Builder: Ionospheric Investigations in High Latitudes Nature. **132**, 340/341 (1933).

2. Harang, L.: Änderungen der Ionisation der höchsten Atmosphärenschichten während der Nordlichter und erdmagnetischen Störungen. Geofys. Publik. **11**, 17 (1937).

— Experimental Studies on the Reflection of Radio Waves from the ionized Regions. Geofys. Publik. **13**, 4 (1942).

3. Burkard, O.: Schichtbildung in der höheren Ionosphäre. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa, **155**, 5/6 (1947).

4. — A sporadic F-Layer. Terrestr. Magnet. **53**, 1, (1948).

551.577.2

Méthode de comparaison des régimes pluviaux en météorologie synoptique.

par

M. Bouët, Montana (Suisse).

Résumé. On développe une méthode basée sur le dénombrement des jours de pluie communs à deux stations données et sur l'écart avec leur probabilité. Une formule simple définit l'indice de similitude de deux régimes pluviaux, indice qui peut varier de — 1 à + 1 et qui caractérise la plus ou moins grande similitude des distributions chronologiques de la pluie en deux endroits quelconques. L'application de la méthode conduit à établir une loi de décroissance de l'indice avec la distance séparant les stations comparées. Dans la région alpine cette loi présente une anomalie résultant de l'effet orographique.

Zusammenfassung. Von der Anzahl der gleichzeitigen Niederschlagstage an zwei Beobachtungsstationen und von der Abweichung ihrer Wahrscheinlichkeit ausgehend, wird eine Methode zum Vergleiche der Niederschlagstypen im synoptischen Sinne entwickelt. Der sogenannte Ähnlichkeitsindex, der zwischen — 1 und + 1 variieren kann, wird mathematisch definiert. Je nach dem Wert desselben ist die zeitliche Verteilung der Niederschlagstage an zwei Orten gleich (+ 1), indifferent (0) oder entgegengesetzt (— 1). Bei der Anwendung der Methode tritt eine gesetzmäßige Abnahme des Index mit der Entfernung auf. Ein entgegengesetztes Verhalten des Ähnlichkeitsindex beiderseits der Alpen veranschaulicht die Rolle, welche die Alpen bekanntlich als Wetterscheide spielen.

Summary. A method of obtaining a synoptic view of the distribution of precipitation (rain- and snowfall) is developed. It is based on the number of days on which precipitation occurs at both of two places more or less distant from each other. A mathematical definition is given of an index of similarity, which latter varies between — 1 and + 1. These, limiting, figures signify in the case of — 1 that precipitation is least likely to occur on any one day at both of two different places, in the case of + 1 that it is most likely to occur, and that when the index of similarity is 0 no relation at all can be established for the likelihood of precipitation at both places on the same day. The index shows a sharp decline as the distance between places increases. In general it shows less relationship in regard to the simultaneous occurrence of rain- and snowfall between places lying on opposite sides of the Alps than between places on the same side, showing once more how the Alps act as a weather partition. The results, based on observations at 9 places in Switzer-

land and 8 in other European countries, are valid for the Temperate Zone; for other climatic regions they may be different.

I. Généralités.

La méthode développée ici a pour objet de caractériser par un nombre, *l'indice de similitude*, le degré d'analogie existant entre les régimes synoptiques des précipitations de deux stations données. Basée sur de très simples notions empruntées au calcul des probabilités, elle permet, jusqu'à un certain point, de constater si deux ou plusieurs régions se trouvent en moyenne sous l'influence des mêmes perturbations troposphériques ou au contraire appartiennent à des systèmes distincts. La méthode suivie fait complètement abstraction des quantités d'eau tombée et n'utilise que les fréquences relatives des jours de pluie. Ces derniers étant mieux déterminés que les hauteurs d'eau dont la mesure exacte offre de si grandes difficultés, la précision à laquelle peut prétendre la méthode est indépendante des mesures pluviométriques proprement dites et de leurs erreurs.

II. Principe de la méthode.

Soient deux stations A et B, proches ou éloignées, où durant une période de n jours consécutifs on observe respectivement N_1 et N_2 «jours de pluie». Pour n suffisamment grand, les fréquences relatives $p_1 = N_1/n$ et $p_2 = N_2/n$ expriment les probabilités d'un jour de pluie de ces deux stations (théorème de Bernoulli). Nous emploierons en outre les nombres $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$ exprimant les probabilités contraires. Nous supposerons toujours dans ce qui suit $p_1 < p_2$; le cas, rare, où $p_1 = p_2$ s'introduit aisément dans les formules ci-dessous.

La probabilité d'un jour de pluie *simultané* en A et B est égale à $P = p_1 p_2$ d'après le théorème des probabilités composées. Soit d'autre part C le nombre de jours de pluie simultanés en A et B *effectivement observés*; leur fréquence relative sera $F = C/n$.

Comparons maintenant F et P: si la distribution chronologique des jours de pluie en A et B n'obéit à aucune loi de dépendance mutuelle, F et P seront confondus. En fait il n'en sera rien pour des stations dont la distance est inférieure aux dimensions des perturbations atmosphériques génératrices de pluie: il y a en général corrélation plus ou moins étroite entre la distribution des jours de pluie aux deux stations envisagées.

Considérons donc l'écart $F - P$ qui mesure en quelque sorte cette corrélation: il peut être positif, nul ou négatif. Un écart positif indiquera une certaine similitude de la distribution des jours de pluie en A et B; un écart nul signifiera l'absence de lien entre les deux régimes pluviaux, et un écart négatif marquera une opposition de régime, les jours de pluie en A correspondant en général à des jours sans pluie en B et vice versa. Tel est le principe de la méthode.

Transformons pour le calcul l'écart absolu $F - P$ en un écart relatif. $P = p_1 p_2$ étant donné, établissons les limites entre lesquelles F peut

varier dans les trois cas énoncés plus haut. Nous nous bornons à l'essentiel de la discussion d'ailleurs facile.

Pour $F - P > 0$, F est au minimum égal à P et au maximum égal à p_1, car le nombre de coïncidences C ne peut être supérieur au nombre de jours de pluie le plus petit N_1; son intervalle de variation est donc $p_1 - p_1 p_2 = p_1 q_2$. Pour $F - P < 0$, F peut varier de 0 à p_1 si $p_1 + p_2 \leqslant 1$, ou de $p_1 - q_2$ à p_1 si $p_1 + p_2 \geqslant 1$; ses intervalles de variation sont donc respectivement de $p_1 p_2$ et de $q_1 q_2$. Le troisième cas possible revient à écrire $F = P$. L'écart relatif cherché s'exprime dès lors par les trois formules suivantes:

$$S = \frac{F - P}{p_1 q_2} \tag{1}$$

si $F - P > 0$;

$$S = \frac{F - P}{p_1 p_2} \tag{2}$$

si $F - P < 0$ et $p_1 + p_2 \leqslant 1$;

$$S = \frac{F - P}{q_1 q_2} \tag{3}$$

si $F - P < 0$ et $p_1 + p_2 \geqslant 1$.

Pour $F = P$, on a $S = 0$.

Nous appelons S *l'indice de similitude*; il a une valeur comprise entre -1 et $+1$. Sa signification météorologique est simple et peut se résumer schématiquement comme suit:

$S = 1$, types pluviaux semblables;
$S = 0$, types pluviaux indifférents;
$S = -1$, types pluviaux opposés.

Sur la base de ce schéma, on interprétera aisément les valeurs intermédiaires de l'indice S. La formule (1) est pratiquement la plus usitée, au moins pour les courtes distances; pour les grandes distances on est souvent amené à employer la formule (2). Nous donnons plus loin un exemple de calcul de S.

Dans ce qui suit l'indice de similitude a été calculé pour 3 ans ($n = 1095$); il est connu à 0,05 près environ, mais avec une précision meilleure pour les stations peu distantes que pour les stations éloignées. Nous avons défini comme «jours de pluie» ceux où l'on a mesuré au moins 0,3 mm. d'eau, conformément à l'usage de la Station centrale suisse de météorologie qui nous semble judicieux tant du point de vue de la dynamique atmosphérique (exclusion des bruines locales) que du point de vue de l'exactitude statistique. Au reste, comme on le verra, cette convention est sans effet sur la valeur de l'indice et n'a donc rien de restrictif.

III. Applications.

A) Matériel.

Nous avons calculé l'indice de similitude pour un certain nombre de couples de stations suisses et européennes. Des raisons d'ordre pratique

nous ont fait choisir la période de 1925/27 pour la Suisse, et celle de 1930/32 pour l'Europe; la station de Zurich figure d'ailleurs dans les deux séries. Le travail préparatoire est un peu long et fastidieux; nous avons dû dénombrer au total plus de 23500 simultanéités sur des tableaux synoptiques appropriés.

Nous avons utilisé pour la Suisse les stations de Zurich, Bâle, Berne, Neuchâtel, Genève, Sion, St. Gothard, Bevers et Lugano, ce qui donne par combinaisons deux à deux des stations 36 valeurs moyennes de l'indice S. En outre, nous avons choisi les stations de Valentia Observatory (Eire), Aberdeen (Ecosse), Stockholm et Karesuando (Suède), Hamburg et Königsberg (Allemagne), Vienne (Autriche) et Observatoire du Vésuve (Italie), ce qui donne de nouveau en comptant Zurich 36 valeurs de S.

Voici tout d'abord un exemple de calcul de l'indice se rapportant au couple de stations Zurich-Neuchâtel (1930/32):

	N	p	n	C	F	P
Zurich	520	0,475				
			1096	399	0,364	0,206
Neuchâtel..	476	0,434				

Ici $p_1 = 0{,}434$ et $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}525$.
La formule (1) donne $S = 0{,}68$.

B) L'indice de similitude et la distance.

Nous avons constaté, comme il fallait s'y attendre, que l'indice de similitude est une fonction de la distance séparant les stations comparées entre elles. S est voisin de l'unité pour des stations très rapprochées et tend vers zéro pour des stations très éloignées. Voici un exemple:

	distance	S
Zurich—Zollikon.....	4 km.	0,91
„ —Berne.....	95 „	0,76
„ —Hambourg	690 „	0,20
„ —Karesuando	2470 „	— 0,03

Grâce aux 72 valeurs trouvées en Suisse et en Europe pour l'indice de similitude S, il est possible de tracer la courbe moyenne de décroissance avec la distance d, et d'en établir l'équation empirique. Celle-ci peut s'écrire:

$$S = e^{-0{,}0025\,d} \qquad (4)$$

où d est exprimé en kilomètres. L'écart moyen des valeurs trouvées et des valeurs calculées par cette formule pour les distances supérieures à 300 km. est de

$$\frac{\Sigma\,\varepsilon}{n} = +\,0{,}02 \qquad (n = 36).$$

La relation (4) est donc acceptable. Nous prenons à dessein la valeur algébrique des écarts, puisque ceux-ci ont une signification physique qui dépend de leur signe.

Pour les distances inférieures à 300 km., il est plus simple de substituer à la relation (4) l'équation de la tangente à l'exponentielle au point d'abscisse 150 km.; on obtient la relation linéaire:

$$S = -0{,}0017\, d + 0{,}94 \qquad (5)$$

qui rend les mêmes services que (4) dans cet intervalle. Cette fonction n'est évidemment plus valable pour les très petites distances, puisque pour $d = 0$ on doit avoir par définition $S = 1$; mais à partir de 10 km. elle est suffisante. Au-delà de 300 km. elle devient inutilisable. Les 36 valeurs de S trouvées pour les stations de Suisse s'ordonnent assez bien autour de la droite (5), au moins en ce qui concerne les localités du Plateau et du Valais; l'écart moyen est donné sous E).

La relation (4) et pour les petites distances la relation plus simple (5) fournissent ainsi la loi générale de décroissance de l'indice de similitude avec la distance. Il s'agit bien entendu d'une loi statistique valable pour une période suffisamment longue (3 ans au moins).

D'après la relation empirique (4), l'indice de similitude devient pratiquement nul à partir de 2000 km. environ. Cette distance est de l'ordre de grandeur des plus grandes perturbations troposphériques (zones pluviales liées aux fronts). Deux localités telles que Zurich et Hambourg par exemple sont fréquemment sous l'influence d'une même zone frontale et leurs précipitations sont donc souvent simultanées; il n'en reste pas moins que, en moyenne, l'indice de similitude de ces deux stations n'est que de 0,20 (par le calcul 0,18) ce qui traduit un lien assez lâche entre les régimes pluviaux. Entre Zurich et Karesuando (extrême Nord de la Suède), l'indice n'est plus que de — 0,03 (par le calcul 0,00) mettant en évidence l'indépendance complète, en moyenne, des deux régimes.

Nous avons comparé les valeurs de l'indice en latitude et en longitude en Europe, entre Valentia et Königsberg (2000 km.) d'une part et entre Karesuando et le Vésuve (3100 km.) d'autre part en utilisant les stations intermédiaires. Sur l'axe Nord-Sud l'écart moyen est de — 0,002 (15 valeurs), tandis que sur l'axe W—E qui est aussi celui des trajectoires les plus fréquentes des dépressions l'écart moyen est de 0,047 (11 valeurs). Faut-il considérer cette divergence des deux écarts comme réelle? Il semble toutefois qu'il existe une légère anisotropie de l'espace européen par rapport à l'indice de similitude, à savoir que dans la direction W—E les régimes pluviaux sont un peu plus liés que dans la direction N—S.

C) Fixité de l'indice.

Pour les distances moyennes, jusqu'à 200 km. environ, l'indice de similitude n'est pas encore stabilisé au bout d'un an comme le prouve le tableau suivant des valeurs annuelles calculées pendant 10 ans pour deux groupes de stations suisses:

Année	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1921/30
Berne—Neuchâtel	0,73	0,77	0,77	0,77	0,73	0,80	0,71	0,87	0,68	0,79	0,75
Bâle—Lugano ...	0,35	0,40	0,46	0,36	0,33	0,39	0,33	0,32	0,37	0,32	0,37

L'indice présente, on le voit, de curieuses variations d'une année à l'autre, sans qu'il y ait parallélisme entre les deux séries.

Néanmoins l'indice calculé pour une période de 3 ans est déjà passablement stabilisé comme le montrent les exemples suivants:

	1925/27	1930/32
Zurich—St. Gothard	0,54	0,57
„ —Stockholm	0,10	0,11
	1921/30	1930/32
Bâle—Neuchâtel	0,75	0,75
„ —Lugano	0,37	0,41

Une période de 5 ans fournirait sans doute des valeurs de l'indice très stables et tout à fait comparables entre elles.

La variation saisonnière de l'indice est illustrée par le tableau suivant relatif à la période de 10 ans 1921/30:

	Hiver	Été	Année
Berne—Neuchâtel	0,77	0,76	0,75
Bâle—Lugano	0,30	0,41	0,37

On remarque que la variation, insignifiante pour le premier groupe, est très nette pour le second, et que les moyennes annuelles ne sont pas égales aux moyennes des moyennes saisonnières. Il est probable que pour le groupe Bâle-Lugano les pluies orageuses d'été intéressant presque simultanément toute la zone alpine accentuent la similitude des régimes pluviaux des versants nord et sud par ailleurs assez différenciés.

L'indice de similitude peut également se calculer à l'aide des « heures de pluie » au lieu des jours en appliquant les mêmes formules; n sera alors le nombre total d'heures de la période envisagée. Nous avons effectué la comparaison des deux procédés sur le couple des stations Aberdeen—Vésuve pour lesquelles nous disposions de tableaux horaires de la pluie, et cela pour l'année 1925; on obtient les indices suivants:

jours de pluie	0,14	(n = 365 j.)
heures de pluie	0,12	(n = 8760 h.)

Les deux valeurs de l'indice diffèrent très peu l'une de l'autre, de sorte que les deux procédés sont équivalents.

Le fait de négliger, comme nous l'avons fait partout, les jours de pluie avec moins de 0,3 mm. d'eau ne présente, semble-t-il, pas d'inconvénient. Nous avons en effet calculé l'indice de similitude pour Berne—Neuchâtel (1930/31) en prenant une fois les jours de pluie avec au moins 0,3 mm. et une autre fois les jours de pluie à partir de 0,1 mm.; les deux procédés nous ont donné exactement le même indice de 0,75. On a affaire ici à deux « bonnes » stations. En ne considérant que les quantités de pluie supérieures à 0,3 mm. on a probablement l'avantage d'un plus sûr dénombrement des jours de pluie en comparant des stations d'inégale valeur. Il est vrai que des stations météorologiques réputées mauvaises ne devraient jamais être utilisées.

D) Indice négatif.

L'indice de similitude, d'après sa définition, peut varier de — 1 à + 1. Or nous n'avons mentionné jusqu'ici que des valeurs expérimentales positives ou faiblement négatives. La loi de décroissance (4) ne s'applique qu'aux valeurs moyennes, stabilisées de l'indice, c'est à dire calculées sur une période d'au moins 1000 jours; dans ce cas les valeurs négatives restent très voisines de zéro. Il faut s'adresser à des périodes plus courtes pour trouver des indices fortement négatifs. Nous n'en donnons qu'un exemple, celui du couple Zurich—Karesuando dont voici les indices de mois en mois pour 1925:

I	II	III	IV	V	VI
0,14	— 0,38	— 0,12	0,07	— 0,17	0,40
VII	VIII	IX	X	XI	XII
— 0,07	0,10	0,12	— 1,00	— 0,40	— 0,26

On trouve de grandes variations de l'indice au cours de l'année; en octobre où il y eut à Zurich 8 jours de pluie et à Karesuando 7, l'indice a atteint sa limite inférieure de — 1, ce qui signifie qu'il n'y eut ce mois là aucun jour de pluie commun aux deux stations ($F = 0$) et que par conséquent les régimes pluviaux dépendaient de perturbations distinctes les unes des autres.

Notons encore que nous avons rencontré la valeur maximum de l'indice (+ 1) en comparant mois par mois les stations de Zurich et de Zollikon distantes de 4 km. seulement.

E) L'anomalie alpine.

Nous avons été frappé dès le début de notre recherche par le comportement particulier du versant sud des Alpes en ce qui concerne l'indice de similitude. Si l'on calcule l'indice de Lugano par rapport aux autres stations suisses du versant nord, on constate qu'il est anormalement bas. Voici les écarts moyens par rapport aux valeurs des indices tirées de la relation (5):

Plateau suisse et Valais (15 groupes)	— 0,01
St. Gothard comparé au Plateau et au Valais (6 groupes)	— 0,10
Lugano comparé au Plateau et au Valais (6 groupes)	— 0,22

L'écart moyen du St. Gothard est déjà anormalement grand; celui de Lugano est 20 fois celui des stations du versant nord; il est toujours négatif et varie entre les valeurs extrêmes de — 0,13 et — 0,34. Nous croyons que cette anomalie est réelle et qu'elle mesure en quelque sorte l'effet produit par la chaîne alpine sur les perturbations atmosphériques. L'indice de similitude mettrait ainsi en évidence le rôle bien connu des Alpes comme limite séparant deux types de temps (Wetterscheide). Tout se passe comme si du point de vue de son régime pluvial Lugano se trouvait à une distance double de celle qui la sépare de l'axe du Plateau

suisse. Les précipitations de foehn et celles des fronts chauds italiens expliquent cette divergence entre le régime pluvial du Tessin et celui du versant nord des Alpes.

IV. Conclusion.

Nous avons essayé de montrer le parti que l'on peut tirer du calcul de l'indice de similitude pour la comparaison des régimes pluviaux du point de vue synoptique. On a vu que pour des distances inférieures à 2000 km. environ l'indice exprime effectivement l'analogie plus ou moins étroite des régimes; au-delà de ce rayon la loi des grands nombres l'emporte manifestement, de sorte que l'indice tendant vers zéro met en évidence le hasard des événements météorologiques sur de grandes étendues terrestres.

Nos conclusions ne sont valables que pour le continent européen soumis dans son ensemble au même régime de perturbations atmosphériques de la zone tempérée. La méthode esquissée fournirait peut-être d'autres résultats dans le cas de régimes pluviaux très différenciés (pluies tropicales, pluies de moussons) ou dans celui des grandes barrières orographiques (Rocky Mountains) comme semble l'indiquer l'anomalie due à la chaîne alpine.

551.481

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Über die mechanischen Arbeitsgrößen der Binnenseen.

Von

O. Eckel, Wien.

Zusammenfassung. Die zur Durchmischung verschieden temperierter Wassermassen notwendige Mindestarbeit wird aus der beim Mischungsvorgang erfolgenden Schwerpunktsverlagerung errechnet. Jede Durchmischung bewirkt aber eine Volumsverminderung, deshalb liegt der Schwerpunkt der Wassermassen nach erfolgter Mischung *nicht* in Höhe des Raumschwerpunkts, sondern etwas tiefer. Die Berücksichtigung dieser Volumsverminderung führt zu Beträgen der mechanischen Arbeitsgrößen, die gegenüber den von W. Schmidt abgeleiteten wesentlich geringer sind.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache wird auch die *relative Stabilität* als Maß des Durchmischungsgrades einer Wassermasse definiert und formelmäßig abgeleitet.

Definiert man „Stabilität", „Birges Arbeitsmaß" und „Maximale Arbeit" — abweichend von E. A. Birge und W. Schmidt — für eine während des thermischen oder mechanischen Prozesses *unveränderliche* Wassermenge, so stellen diese Arbeitsgrößen nichts anderes dar als die Lageenergie der Wassermasse, bzw. deren Änderung, die sich bei einer tatsächlichen oder gedachten Erwärmung, Durchmischung oder Abkühlung einstellt.

Summary. The minimum work of mixing up masses of water of different temperatures is computed from the movement of the centre of gravity during the mixing process. Every mixing process causes a decrease of volume. Therefore the centre of gravity of water masses after the mixing process does *not* lie on the place of the geometric centre of gravity but a little deeper. With regard to this decrease of volume amounts of mechanic work result that are much smaller than those derived by W. Schmidt. In consideration of this fact also the *relative stability* as a measure for mixing up water masses is defined and put down in a formula. Defining „Stability", „Birge's Measure of Effect" and „Maximum Effect" — diverging from E. A. Birge and W. Schmidt — for masses of water staying *unchangeable* during the thermal or mechanical process these quantities represent the Potential Energy of water masses, respectively the changement appearing in an real or fictive warming, mixing or cooling process.

Résumé. Le travail minimum nécessaire au mélange des masses d'eau de température différente est computé du mouvement du centre de gravité résul-

tant du procédé de mélange. Chaque procédé de mélange cause une diminution du volume. C'est pourquoi le centre de gravité des masses d'eau après le procédé de mélange *n'est pas* situé au niveau du centre géométrique, mais un peu plus bas. Considérant cette diminution de volume on trouve des montants de travail mécanique plus petits que ceux dérivés par W. Schmidt. En considération de ce fait la *stabilité relative* est également définie comme mesure du dégré de mélange des masses d'eau et dérivée en formule.

En définissant „stabilité", „mesure de travail de Birge" et „travail maximum" — in contradiction de E. A. Birge et W. Schmidt — pour une masse d'eau *invariable* durant le procédé thermique ou mécanique, ces quantités représentent l'énergie potentielle des masses d'eau, respectivement le changement qui apparait au cas de l'échauffement, du mélange ou du refroidissement réel ou fictif.

Zweck der vorliegenden Untersuchung ist die Herleitung von mathematischen Formeln zur numerischen Berechnung der mechanischen Arbeitsgrößen, die gegenüber den bisher verwendeten Verbesserungen aufweisen, sowie eine Darlegung der Stellung der mechanischen Arbeitsgrößen innerhalb der übrigen im Wärmeumsatz der Seen auftretenden Energiegrößen. Da die Rechnung nur für chemisch reines Wasser durchgeführt wurde, ist das Ergebnis auch nur auf unsere Süßwasser-Binnenseen anwendbar, in denen die beigemengten oder gelösten organischen bzw. anorganischen Stoffe im allgemeinen nur eine ganz geringe Konzentration besitzen, dagegen gilt es nicht für das Meer oder für Binnenseen mit hoher Salzkonzentration.

Zunächst sei auf einige physikalische Eigentümlichkeiten des reinen Wassers hingewiesen, die für unsere Betrachtungen von grundlegender Bedeutung sind:

a) die *Dichte-Temperaturfunktion* des Wassers.

Die Dichte des Wassers als Funktion der Temperatur kann im Bereich $0 \leqq t \leqq 40°$ C nach Thiessen, Scheel und Diesselhorst (siehe Landolt-Börnstein, Phys.-chemische Tabellen) in sehr guter Näherung durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$\varrho = 1 - \sigma = 1 - \frac{(t-3{,}98)^2}{503\,570} \cdot \frac{t+283}{t+67{,}26}. \tag{1}$$

Der zweite Faktor des Abzugsgliedes liegt im angegebenen Temperaturbereich zwischen 3,0 und 4,2. Setzen wir ihn für jeden Temperaturwert gleich 3,6, so geht Gleichung (1) in eine zwar nur grobe, jedoch sehr durchsichtige Form über, die für unsere Überlegungen vollauf genügt:

$$\varrho = 1 - \sigma \approx 1 - c\,(t-4)^2; \quad c \approx \frac{1}{140\,000}. \tag{2}$$

Diese besondere Art der Temperaturabhängigkeit der Wasserdichte bedingt einige merkwürdige physikalische Eigenschaften, auf die hier zunächst kurz hingewiesen sei.

Bei der Temperatur von 4° C wird $\varrho = 1$, bei jeder anderen Temperatur ist $\varrho < 1$; das heißt: Enthält ein vorgegebenes Volumen bei 4° C

eine bestimmte Wassermasse, so enthält es bei jeder anderen Temperatur wegen der Ausdehnung des Wassers eine kleinere Masse, und zwar eine um so kleinere, je mehr die Wassertemperatur von 4° C abweicht.

So bedingt auch die Dichtefunktion die natürliche Temperaturverteilung in Seen: Oben wärmeres, weil leichteres Wasser, unten kälteres, weil schwereres Wasser. Im Temperaturbereich von 0 bis 4° gilt das Umgekehrte.

Soll eine vorhandene Temperaturverteilung geändert werden, so muß wegen der Dichteunterschiede gegen die Schwerkraft Arbeit geleistet werden. Wäre nun die Dichte-Temperaturfunktion linear, so wäre die Arbeit lediglich vom Temperatur*unterschied* der zur Mischung gelangenden Schichten abhängig. Das tatsächliche Gesetz bedingt aber, daß einem gegebenen Temperaturunterschied ein um so größerer Dichteunterschied entspricht, je höher die Temperatur der beteiligten Wassermassen ist. Es bedarf also eines wesentlich größeren Arbeitsaufwandes, die sommerlich warmen Oberflächenschichten eines Sees zu durchmischen als die noch kühlen des Frühjahres.

Schließlich muß darauf hingewiesen werden, daß *jede Durchmischung verschieden temperierter Wassermassen* als Folge der Dichte-Temperaturfunktion *eine Volumsverminderung* (*Schrumpfung*) *der Wassermassen verursacht.*

Dies läßt sich ganz allgemein beweisen, am kürzesten an Hand des Schaubildes der Dichte-Temperaturfunktion. Wir wählen hier den rechnerischen Weg: Das Seebecken habe konstanten Querschnitt, die Temperaturverteilung sei beliebig. Die Wassermasse denken wir uns in 2^n horizontal gelagerte Schichten gleicher Dicke geteilt, innerhalb jeder Schicht soll die Temperatur konstant sein. Die Durchmischung des Sees kann man sich nun so vorgenommen denken, daß man beim ersten Schritt je zwei Einzelschichten miteinander mischt, beim zweiten Schritt je zwei Doppelschichten, beim dritten Schritt je zwei Vierfachschichten usw. Da n endlich ist, gelangt man auf diese Weise nach endlich vielen Schritten zu einer vollständigen Durchmischung der Wassermassen. Der gesamte Mischprozeß ist also zurückgeführt auf eine endliche Zahl von Einzelprozessen. Läßt sich aber für den Einzelprozeß die Behauptung nachweisen, daß bei der Mischung zweier verschieden temperierter Wasserschichten stets eine Volumsverminderung eintritt, so gilt diese Behauptung auch für die Summe der Einzelprozesse und damit für die vollständige Durchmischung der gesamten Wassermasse.

Für den Einzelprozeß gibt es zwei Möglichkeiten:

1. die beiden Schichten haben gleiche Temperatur. Dann ist mit der Mischung keine Volumsverminderung verbunden;

2. die beiden Schichten haben verschiedene Temperatur.

Schicht 1 habe das Volumen $V = M_1 \cdot \omega\,(t_1)$,
Schicht 2 habe das gleich große Volumen $V = M_2 \cdot \omega\,(t_2)$.

(M = Masse, $\omega \equiv \frac{1}{\varrho} \approx 1 + \sigma$ = spezifisches Volumen.)

Nachzuweisen ist, daß die Doppelschicht 1 + 2 nach der Mischung ein Volumen $\overline{V} < 2\,V$ hat.

Es ist

$$\overline{V} = (M_1 + M_2)\,\omega\,(\vartheta) = V\,[1 - \sigma\,(t_1) + 1 - \sigma\,(t_2)]\left[1 + \sigma\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right].$$

Benutzt man nach Gl. (2) die Dichte-Temperaturfunktion, so erhält man

$$\overline{V} = V \cdot [2 - c\,(t_1 - 4)^2 - c\,(t_2 - 4)^2]\left[1 + c\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - 4\right)^2\right]$$

und, da $c \ll 1$ ist,

$$\overline{V} = V\left[2 - c\,(t_1 - 4)^2 - c\,(t_2 - 4)^2 + c\,\frac{(t_1 + t_2)^2}{2} - 8\,c\,(t_1 + t_2) + 32\,c\right].$$

Nach weiterer Ausrechnung schließlich

$$V = 2\,V - \frac{c\,V}{2}\,(t_1 - t_2)^2$$

oder

$$\overline{V} < 2\,V,$$

was zu beweisen war.

b) Die *Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme.*

Die spezifische Wärme des Wassers ist ganz ähnlich wie das spezifische Volumen von der Temperatur abhängig, allerdings liegt das Minimum der spez. Wärme bei etwa 34° C. Nach Jäger und v. Steinwehr [*1*] gilt folgendes empirisch gefundene Gesetz:

$$c\,(t) = \overset{(\alpha)}{1{,}00492} - \overset{(\beta)}{4{,}22542 \cdot 10^{-4} \cdot t} + \overset{(\gamma)}{6{,}32379 \cdot 10^{-6} \cdot t^2} \qquad 0° < t < 50°\,\mathrm{C} \qquad (3)$$

Durch diese Temperaturabhängigkeit der spez. Wärme wird angezeigt, daß der Mischungsprozeß nicht ohne Wärmetönung vor sich geht, die ihrerseits wieder die Mischtemperatur beeinflußt.

I. Definition und Ableitung der Stabilität.

Nach dieser kurzen physikalischen Einleitung beginnen wir gleich mit der Ableitung der gebräuchlichsten unter den mechanischen Arbeitsgrößen, der Stabilität. Unter Stabilität definieren wir nach W. Schmidt [*2*] jenen Betrag an Arbeit, der im Minimum aufgewendet werden muß, um eine Wassermasse von gegebener Temperaturverteilung völlig zu durchmischen.

Es bedeuten:

z die laufende Tiefe ($0 \leqq z \leqq Z$), von der Oberfläche aus gezählt; die Temperaturverteilung $t\,(z)$ bestimmt die Dichteverteilung $\varrho\,(z)$;

$f\,(z)$ ist das mit der Tiefe veränderliche Seeareal;

ζ_s = geometrischer Schwerpunkt des Seebeckens;

ζ = Schwerpunkt der Gesamtwassermasse bei vorgegebener Temperaturverteilung $t\,(z)$, bzw. Dichteverteilung $\varrho\,(z)$;

ζ = Schwerpunkt der Gesamtwassermasse nach erfolgter vollständiger Durchmischung (einheitliche Mischtemperatur ϑ).

Es ist nun

$$\zeta_s = \frac{\int_0^z f \cdot z \cdot dz}{\int_0^z f \cdot dz}; \qquad \zeta = \frac{\int_0^z \varrho \cdot f \cdot z \cdot dz}{\int_0^z \varrho \cdot f \cdot dz}; \qquad \bar{\zeta} = \frac{\varrho(\vartheta) \cdot \int_{z(\vartheta)}^z f \cdot z \cdot dz}{\varrho(\vartheta) \cdot \int_{z(\vartheta)}^z f \cdot dz}$$

$$\text{Gesamtwassermasse } M = \int_0^z \varrho \cdot f \cdot dz = \varrho(\vartheta) \int_{z(\vartheta)}^z f \cdot dz.$$

Die Wassermasse füllt *vor* der Durchmischung das Seevolumen vollständig aus, *nach* der Durchmischung hat sie stets ein kleineres Volumen; die Wasseroberfläche liegt dann nicht mehr bei $z = 0$, sondern etwas tiefer, bei $z = z(\vartheta)$.

Um die Mischungsarbeit zu berechnen, denkt man sich die Wassermasse in ihrem Schwerpunkt vereinigt und betrachtet die verschiedene Lage desselben vor und nach der Durchmischung. Vor der Durchmischung liegen im allgemeinen die schwereren Massen unten (stabile Schichtung), die leichteren oben, der Schwerpunkt (ζ) ist nach unten verlagert; nach vollzogener Durchmischung wird der Schwerpunkt ($\bar{\zeta}$) höher liegen als vor der Durchmischung ($\zeta < \bar{\zeta}$), aber noch etwas tiefer als der geometrische Schwerpunkt des Seebeckens (ζ_s), weil die durchmischte Wassermasse das Seebecken ja nicht vollständig ausfüllt. Es gilt also die Ungleichung

$\zeta_s < \bar{\zeta} < \zeta$ . . . . (4a) für stabile Schichtung, dagegen
$\zeta_s = \bar{\zeta} = \zeta$ . . . . (4b) für die isotherme Schichtung $t = 4°$ C, und
$\zeta < \zeta_s < \bar{\zeta}$ . . . . (4c) für labile Schichtung.

Die Mischungsarbeit errechnet sich aus der Arbeit, die bei der Verlagerung des Massenschwerpunktes gegen die Schwerkraft geleistet werden muß. Sie beträgt

$$S = \gamma \cdot M \cdot (\zeta - \bar{\zeta}) \quad \gamma = \text{Schwerebeschleunigung.} \tag{5}$$

Sie ist bei stabiler Lagerung positiv, bei labiler Lagerung negativ.

W. Schmidt definiert (a. a. O.) die Stabilität wie oben, verwendet jedoch statt $\bar{\zeta}$ die Größe ζ_s. Beide unterscheiden sich in unseren Seen höchstens um wenige Millimeter, was ihm vernachlässigbar erschien. Der Unterschied zwischen

$$S = \gamma M (\zeta - \bar{\zeta}) \qquad \text{und} \qquad S' = \gamma M (\zeta - \zeta_s)$$

ist jedoch beträchtlich, da in

$$S' - S = \gamma M (\bar{\zeta} - \zeta_s) \tag{6}$$

die winzige Größe $\zeta - \zeta_s$ mit dem Gesamtgewicht der Wassermasse des Sees multipliziert wird.

1. Numerische Ableitung der Stabilität für ein Seebecken mit konstantem Querschnitt.

Das Seebecken wird geteilt in eine endliche Anzahl (n) von Wasserschichten der Dicke h. Gesamttiefe $Z = n \cdot h$; $f = \text{const.}$, M = Gesamtmasse, ω = spez. Volumen, ϑ = Mischtemperatur.

$$M = f \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{n} \varrho_i; \qquad \zeta = \frac{1}{M} \cdot f \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \left(i - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i \left(i - \frac{1}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i};$$

$$\zeta = Z - \frac{1}{2} M \frac{\omega(\vartheta)}{f}.$$

$$S = \gamma M (\zeta - \zeta) = \gamma f h \left[\sum_{i=1}^{n} \varrho_i \left(i - \tfrac{1}{2}\right) - Z \cdot \sum_{i=1}^{n} \varrho_i + \tfrac{1}{2} h \omega(\vartheta) \left(\sum_{i=1}^{n} \varrho_i \right)^2 \right].$$

Nach Einführung von $\varrho_i = 1 - \sigma_i$ und $\omega(\vartheta) \equiv \frac{1}{\varrho(\vartheta)} \approx 1 + \sigma(\vartheta)$ ergibt sich

$$\frac{S}{\gamma f h} = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2 h}{2} - n h \sigma(\vartheta) \sum_{i=1}^{n} \sigma_i - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left(i - \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{h}{2} [1 + \sigma(\vartheta)] \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \right)^2 + \frac{n^2 h}{2} \sigma(\vartheta).$$

Für $h = 1$ und bei Vernachlässigung von Gliedern, die klein von höherer Ordnung sind, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$S = \gamma f \left[\frac{n^2}{2} \sigma(\vartheta) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left(i - \frac{1}{2}\right) \right]. \tag{7}$$

Entsprechend errechnet sich nach W. Schmidt:

$$S' = \gamma M (\zeta - \zeta_s) = \gamma \cdot f \cdot \left[\frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \left(i - \frac{1}{2}\right) \right]. \tag{8}$$

Beispiel: Das Seebecken von konstantem Querschnitt $f = 1$ sei in 10 Schichten der Dicke $h = 1$ geteilt. Schicht 1 habe die Temperatur 24°, die übrigen Schichten dagegen die Temperatur 4°. Unter Benutzung einer Dichtetafel für Wasser verschiedener Temperatur (Landolt-Börnstein) ergibt sich für

$$\sigma(24°) = 2677 \cdot 10^{-6}, \quad \sigma(4°) = 0$$

und für die Mischtemperatur

$$\vartheta = 6°: \quad \sigma(6°) = 32 \cdot 10^{-6}.$$

Daraus folgt

$$S = 265 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma \quad \text{und} \quad S' = 12047 \cdot 10^{-6} \gamma.$$

Die Berechnung nach W. Schmidt gibt einen rund 45mal größeren Wert als die korrekte Ableitung. Das Mißverhältnis ändert sich mit der Temperaturschichtung, wie weiter unten noch näher ausgeführt wird.

2. Numerische Ableitung der Stabilität für ein Seebecken mit veränderlichem Querschnitt.

Das Seebecken wird unterteilt in n Schichten von der Dicke 1, die Oberfläche der Schicht i habe ein Areal f_{i-1} und die Temperatur t_{i-1}, die Unterfläche das Areal f_i und die Temperatur t_i.

Die Einzelschicht wird als Kegelstumpf aufgefaßt, ihr Volumen näherungsweise mit $\frac{1}{2}(f_{i-1}+f_i)$ berechnet, das Gesamtvolumen des Seebeckens nach der Simpsonschen Regel[1] mit

$$V_s = \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \ldots\ldots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n}{}' f_i. \tag{9}$$

Die Gesamtmasse des Wassers ist

$$M = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n}{}' \varrho_i f_i,$$

ihr Schwerpunkt *vor* der Durchmischung

$$\zeta = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n}{}' \varrho_i f_i i = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n}{}' \varrho_i f_i i}{\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n}{}' \varrho_i f_i}. \tag{10}$$

Zur Berechnung des Schwerpunktes der Wassermasse *nach* der Durchmischung machen wir folgende Überlegung:

Im Seebecken befänden sich zwei Medien verschiedener Dichte. Medium 1 habe die Dichte ϱ_1, das Volumen v_1 und den Schwerpunkt ζ_1; entsprechend Medium 2: ϱ_2, v_2 und ζ_2. Das Volumen des Seebeckens sei $V = v_1 + v_2$, sein geometrischer Schwerpunkt ζ_s.

Gesucht wird der Massenschwerpunkt ζ der geschichteten Medien 1 und 2. Es gilt folgende Gleichung:

$$v_1 \varrho_1 \zeta_1 + v_2 \varrho_2 \zeta_2 = (v_1 \varrho_1 + v_2 \varrho_2) \zeta. \tag{11a}$$

Ist das ganze Seebecken mit dem Medium 2 erfüllt, so gilt Gleichung

$$v_1 \varrho_2 \zeta_1 + v_2 \varrho_2 \zeta_2 = (v_1 \varrho_2 + v_2 \varrho_2) \zeta_s. \tag{11b}$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$\zeta = \frac{v_1 (\varrho_1 - \varrho_2) \zeta_1 + \varrho_2 (v_1 + v_2) \zeta_s}{v_1 \varrho_1 + v_2 \varrho_2}. \tag{11c}$$

[1] Zur Berechnung der Stabilität einzelner Wasserschichten geringer Mächtigkeit (kleines n) wird man eine genauere Volums- und Schwerpunktsbestimmung vornehmen müssen.

Nun wenden wir diesen Ausdruck zur Berechnung des Schwerpunktes der Wassermasse *nach* der Durchmischung an. In diesem Falle ist $v_1 = \Delta v$, die Differenz zwischen Seevolumen und Wasservolumen, $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_2 v_2 = M$, die Gesamtwassermasse. Der Schwerpunkt der durchmischten Wassermassen wird daher

$$\overline{\zeta} = \frac{-\Delta v \cdot \varrho_2 \cdot \zeta_1 + V \cdot \varrho_2 \cdot \zeta_s}{v_2 \cdot \varrho_2} = \frac{\varrho_2}{M} (\zeta_s V - \zeta_1 \cdot \Delta v). \tag{12}$$

Δv als Differenz zwischen Seevolumen und Wasservolumen ist der Rauminhalt einer nur wenige Millimeter dicken Schicht von der Fläche f_0 (= Areal der Seeoberfläche), deren Schwerpunkt also

$$\zeta_1 = \frac{\Delta v}{2 f_0} \quad \text{ist.}$$

Wir führen zur numerischen Berechnung von ζ_s, ζ und ζ einige formale Abkürzungen ein:

$$A = \sum_{i=0}^{n}{}' f_i, \quad B = \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot i, \quad C = \sum_{i=0}^{n}{}' f_i t_i, \quad D = \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \sigma_i,$$

$$E = \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot i \cdot \sigma_i.$$

Dann ergeben sich folgende übersichtliche Ausdrücke:

$$\zeta_s = \frac{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot i}{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i} = \frac{B}{A}, \tag{13}$$

$$\zeta_s = \frac{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot i - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot i \cdot \sigma_i}{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \cdot \sigma_i} = \frac{B - E}{A - D}, \tag{14}$$

und, da

$$V = \frac{A}{2}, \quad \zeta_s \cdot V = \frac{B}{A} \cdot \frac{A}{2} = \frac{B}{2},$$

ist

$$\overline{\zeta} = \frac{2[1 - \sigma(\vartheta)]}{A - D} \left(\frac{B}{2} - \frac{\Delta v^2}{2 f_0} \right) = \frac{[1 - \sigma(\vartheta)] B}{A - D}. \tag{15}$$

$\frac{\Delta v^2}{2 f_0}$ ist klein von höherer Ordnung gegen B, daher zu vernachlässigen.

Die Stabilität errechnet sich nun zu

$$\underline{S = \gamma M (\zeta - \overline{\zeta})} = \frac{\gamma (A - D)}{2} \left[\frac{B - E}{A - D} - \frac{[1 - \sigma(\vartheta)] B}{A - D} \right] =$$

$$= \underline{\frac{\gamma}{2} [\sigma(\vartheta) \cdot B - E]}. \tag{16}$$

Nach W. Schmidt aber zu

$$S' = \gamma\, M\, (\zeta - \zeta_s) = \frac{\gamma\,(A-D)}{2}\left[\frac{B-E}{A-D} - \frac{B}{A}\right] = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{BD}{A} - E\right). \quad (17)$$

Gl. (16) eignet sich für die numerische Berechnung der Stabilität, wenn die Temperaturlotungen in äquidistanten Tiefen vorliegen. Für den Weg der graphischen Integration ist die allgemeinere Form (16a)[1] erwünscht:

$$S = \gamma \cdot \sigma\,(\vartheta) \int_0^z f\,(z) \cdot z\, dz - \gamma \int_0^z f\,(z) \cdot \sigma\,(z) \cdot z\, dz. \quad (16a)$$

Die Mischtemperatur läßt sich als Quotient $\vartheta = \frac{C}{A}$ in brauchbarer Näherung darstellen, da zur Ermittlung von σ die Temperatur nur auf zwei Dezimalstellen bekannt sein muß. Für den Bereich $2° \leqq t \leqq 6°$ muß aber σ selbst auf Einheiten der 7. Dezimale genau tabelliert werden. Über eine korrektere Berechnung der Mischtemperatur ϑ und eine Fehlerabschätzung siehe späteren Abschnitt.

Beispiel: Lunzer Untersee. Unterteilung in 30 je 1 m dicke Schichten. Temperatur der Schicht 1 sei 24°, die aller übrigen Schichten 4° C. Aus den morphologischen Daten des Sees und aus der gegebenen Temperaturverteilung ergeben sich:

$A = 26{,}752 \times 10^6$ $\quad B = 332{,}260 \times 10^6$ $\quad C = 146{,}918 \times 10^6$

$D = 5350$ $\quad E = 3530$

$\vartheta = 5{,}492°$ $\quad \sigma\,(\vartheta) = 17{,}8 \times 10^{-6}$ $\quad \gamma = 9{,}81$

Daraus die Stabilität

$$S = 8162\ m\, t^* \qquad (t^* = \text{Tonnengewicht})$$

bzw. nach W. Schmidt

$$S' = 308668\ m\, t^*.$$

Das Verhältnis $S' : S$ ist etwa 38 : 1. Da in der Natur eine dem Beispiel zugrunde gelegte Temperaturverteilung nicht vorkommt, wurden bei der Durchrechnung tatsächlich beobachteter Temperaturschichtungen keine so gewaltigen Unterschiede festgestellt; immerhin wurden Quotienten S'/S zwischen 0,6 und 7,0 ermittelt.

Im besonderen beträgt die Schmidtsche Stabilität folgendes Vielfache der hier abgeleiteten Stabilität:

1,3 bis 1,8 bei Sommerstagnation in Seen mit stärkerer Durchmischung z. B. Hallstättersee, Traunsee, Lunzer Untersee;

2,2 bis 3,6 bei Sommerstagnation in Seen mit geringer Durchmischung, bzw. stark ausgeprägter Sprungschicht, z. B. Altausseer See, Klopeinersee.

Da der Durchmischungsgrad einen deutlichen Jahresgang aufweist, ist der Quotient S'/S auch für einen und denselben See nicht konstant. Er nimmt vom Sommerwert gegen den Herbst auf 1,0 ab, erreicht dann

[1] Die untere Grenze des Integrals im ersten Term ist wegen des Schrumpfungsvorgangs bei der Durchmischung genau genommen nicht 0 sondern $z\,(\vartheta)$, was bei Stabilitätsberechnungen dünner Schichten zu berücksichtigen ist.

entweder mit der winterlichen Temperaturumkehr sehr große Werte oder wird bei labiler Schichtung entsprechend Ungleichung (4c) kleiner 1.

Um einen Begriff von der Schwerpunktsverlagerung bei dem Mischungsvorgang zu erhalten, haben wir die Beträge für ζ, ζ, ζ_s und ζ_{4°[1] an einer tatsächlich gemessenen Temperaturverteilung des Lunzer Untersees durchgerechnet. Für den 15. August 1933 ergibt sich:

$\zeta_{4^\circ} = 12{,}42518$ m	$\zeta_{4^\circ}\text{-}\zeta = 2{,}24$ mm
$\zeta = 12{,}42194$ m	$\zeta_{4^\circ}\text{-}\zeta = 4{,}01$ mm
$\zeta = 12{,}42117$ m	$\zeta\text{-}\overline{\zeta} = 1{,}77$ mm
$\zeta_s = 12{,}41984$ m	$\zeta\text{-}\zeta_s = 3{,}10$ mm

II. Der Begriff der relativen Stabilität.

Die Absolutwerte der Stabilität hängen, auf gleiche Mächtigkeit der betrachteten Wassermassen bezogen, von den Dimensionen des Seebeckens, vom Wärmeinhalt des Sees und von der gegebenen Temperaturschichtung ab. Es macht sich in der Limnologie aber sofort das Bedürfnis geltend, einen Ausdruck zu finden, der weder von den morphologischen Größen des Seebeckens, noch vom Wärmeinhalt abhängig ist. Denn die Stabilität sollte ja ein Maß für den *Durchmischungsgrad* eines beliebigen Sees in einem beliebigen Temperaturzustand sein. Damit gäbe sie auch die Möglichkeit, die Seen untereinander auf ihre — durch Wind, Konvektion und Durchflutung bedingte — Durchmischung zu vergleichen.

Um eine solche Größe herzuleiten, gehen wir auf die Definition der Stabilität als Arbeit bei einer Schwerpunktsverlagerung zurück und suchen eine obere Grenze dieser Arbeitsmenge zu berechnen. Da der Betrag der Stabilität der Differenz zweier Schwerpunktslagen proportional ist, wird die maximale Arbeit aus zwei extremen Schwerpunktslagen einer und derselben Wassermasse zu finden sein.

Wird eine stabil geschichtete Wassermasse, die das Seebecken ganz ausfüllt, vollständig durchmischt, so wandert der Schwerpunkt dabei in seine *höchste* Lage (ζ), wird dagegen die Wassermasse einheitlich auf die Temperatur 4° C abgekühlt, so nimmt der Schwerpunkt seine *tiefste* Lage (ζ_{4°) ein.

ζ_{4° wird berechnet, indem man in Gl. (15) für $\sigma\,(4^\circ) = 0$ setzt.

$$\zeta_{4^\circ} = \frac{B}{A - D}. \tag{18}$$

Die maximale Arbeit errechnet sich also zu

$$\underline{S_{\max} = \gamma\, M\,(\zeta_{4^\circ} - \overline{\zeta})} = \gamma \cdot \frac{A - D}{2}\left(\frac{B}{A - D} = \frac{[1 - \sigma\,(\vartheta)]\,B}{A - D}\right) =$$

$$= \underline{\frac{\gamma}{2} \cdot \sigma\,(\vartheta)\,B.} \tag{19}$$

Sie ist lediglich eine Funktion der Mischungstemperatur (Wärmeinhalt) der Wassermasse, dagegen von der jeweiligen Temperaturver-

[1] Bezüglich ζ_{4° siehe folgenden Abschnitt.

teilung gänzlich unabhängig — im Gegensatz zur „Gesamtarbeit" von W. Schmidt.

Als relative Stabilität wird nun definiert:

$$\eta = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{\zeta_{4^\circ} - \overline{\zeta}} = \frac{\sigma(\vartheta) \cdot B - E}{\sigma(\vartheta) \cdot B} \tag{20}$$

oder in der allgemeineren Form

$$\eta = \frac{\gamma\, \sigma(\vartheta) \int_0^z f(z) \cdot z\, dz - \gamma \int_0^z f(z) \cdot \sigma(z) \cdot z\, dz}{\gamma\, \sigma(\vartheta) \int_0^z f(z) \cdot z\, dz}. \tag{20a}$$

W. Schmidt hat formell denselben Quotienten gebildet und ihn $\varkappa$ genannt:

$$\varkappa = \frac{\frac{B}{A} \cdot D - E}{\frac{B}{A} \cdot D}.$$

η ist im allgemeinen, der Definition entsprechend, kleiner als $\varkappa$. Der Betrag von η liegt

bei stabiler Schichtung wegen $\zeta_s < \overline{\zeta} < \zeta < \zeta_{4^\circ}$ zwischen 0 und 1,
bei labiler Schichtung wird er wegen $\zeta < \zeta_s < \overline{\zeta} < \zeta_{4^\circ}$ negativ.

Die relative Stabilität kennzeichnet den jeweiligen Durchmischungsgrad eines Sees vorzüglich, obwohl sie den oben gestellten Bedingungen nicht exakt entspricht:

Zur Zeit der sommerlichen Temperaturverteilung nimmt sie einen für jeden See charakteristischen Wert an, um den sie innerhalb von etwa 4 Monaten schwankt. Stärkere Aufheizung der oberen Schichten bei ruhigem Wetter erhöht sie, größere Durchmischung erniedrigt sie.

Der Abbau der sommerlichen Temperaturschichtung infolge der andauernden Wärmeabgabe des Sees im Herbst läßt die relative Stabilität rasch auf kleine Werte sinken, sie wird 0 bei vollständiger Durchmischung, die meist bei Temperaturen um 4° herum erfolgt. An dieses Stadium schließt sich durch weitere Abkühlung der obersten Schichten, die nun, weil leichter als Wasser von 4° C, nicht mehr absinken, unmittelbar eine Temperaturverteilung von zwar nur geringer absoluter Stabilität, aber hoher relativer Stabilität.

Tritt keine vollständige Durchmischung ein, sondern bleiben leichtere Wassermassen in der Tiefe, so nimmt die relative Stabilität einen negativen Wert an. — Im Frühjahr steigt sie sehr rasch zu dem für den See charakteristischen Wert der Sommerstagnation an, auch wenn die sommerliche Durchschnittstemperatur noch lange nicht erreicht ist.

Die relative Stabilität ist wohl das geeignetste Maß zum Vergleich des Durchmischungsgrades verschieden großer und verschieden tiefer Seen. Für annähernd gleichzeitig gemessene Temperaturschichtung von gleich tiefen Seen oder von Wassermassen gleicher Mächtigkeit läßt sich

auch die absolute Stabilität als Vergleichsmaß benutzen. Gemäß Definitionsgleichung (5) kann S dargestellt werden durch

$$S = \gamma\, M\,(\zeta - \zeta) = \gamma\, Z \left(\frac{M}{Z}\right)(\zeta - \zeta). \qquad (Z = \text{Seetiefe})$$

Nun ist

$$M = \varrho\,(\vartheta) \int_{z(\vartheta)}^{Z} f \cdot dz \approx \int_{0}^{Z} f \cdot dz,$$

daher

$$\frac{M}{Z} \approx \frac{\int_0^Z f\, dz}{\int_0^Z dz} \approx \frac{V}{Z} = f_m \;(= \text{mittleres Seeareal}),$$

folglich

$$S \sim \gamma\, Z\, f_m\,(\zeta - \overline{\zeta}).$$

Für den See 1 gilt nun

$$S_1 \sim \gamma\, Z\, f_{m_1}\,(\zeta - \zeta)_1,$$

für den See 2 entsprechend

$$S_2 \sim \gamma\, Z\, f_{m_2}\,(\zeta - \zeta)_2.$$

Dies ergibt

$$\frac{S_1}{f_{m_1}} : \frac{S_2}{f_{m_2}} \approx (\zeta - \overline{\zeta})_1 : (\zeta - \overline{\zeta})_2,$$

d. h. die durch das mittlere Seeareal geteilten Stabilitäten verhalten sich wie die entsprechenden für eine vollständige Durchmischung notwendigen Schwerpunktsverlagerungen.

Es ist also richtiger, die Stabilität zu Vergleichszwecken auf ein mittleres Seeareal zu beziehen als auf das Oberflächenareal, wie es gelegentlich geschieht.

III. Die übrigen mechanischen Arbeitsgrößen.

(Birges Arbeitsmaß, Gesamtarbeit, maximale Arbeit.)

Gl. (16) enthält als Abzugsglied der rechten Seite eine Größe, die als Birgesches Arbeitsmaß [3] bezeichnet wird. Unter Benutzung von Gl. (19) geht Gl. (16) über in

$$\gamma\, M\,(\zeta - \overline{\zeta}) = \gamma\, M\,(\zeta_{4^\circ} - \overline{\zeta}) - \gamma\, M\,(\zeta_{4^\circ} - \zeta).$$

Das Birgesche Arbeitsmaß ist demnach gleich der Arbeit, die gegen die Schwerkraft zu leisten ist, um den Schwerpunkt einer Wassermasse von ζ_{4° auf ζ zu heben oder mit anderen Worten, um die Temperaturverteilung einer Wassermasse von einheitlich 4° C in eine bestimmte — einer Schwerpunktslage ζ entsprechende — Temperaturverteilung $t\,(z)$ überzuführen.

Das Birgesche Arbeitsmaß tritt auch in Gl. (17) als Abzugsglied auf. Die Größe $\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{B\,D}{A}$ nennt W. Schmidt „Gesamtarbeit"; sie ist stets die Summe aus Stabilität und Birges Arbeitsmaß.

Formal entspricht sie der hier abgeleiteten, aber verschieden definierten „maximalen Arbeit". Um den Unterschied zwischen den von W. Schmidt gebrauchten Arbeitsgrößen und den hier abgeleiteten deutlich vor Augen zu führen, sei ein Beispiel durchgerechnet, das das Tieferwandern und Auflösen einer Sprungschicht infolge Mischung behandelt:

Arbeitsgrößen in einem See mit senkrechten Uferböschungen bei durch Mischung hinabwandernder Sprungschicht. Relative Einheiten.

(5 Schichten gleicher Dicke, Anfangszustand Schicht 1: $t = 24°$ C, übrige Schichten $t = 4°$ C.)

Lage der Sprungschicht	Temperatur der durchmischten Schicht ° C	Nach Gl. (8) (W. Schmidt)		Birges Maß	Nach Gl. (7) (O. Eckel)	
		Gesamtarbeit	Stabilität		Stabilität	Max. Arbeit
Zw. Schicht 1 und 2	24	669	535	134	21	155
Zw. Schicht 2 und 3	14	365	219	146	9	155
Zw. Schicht 3 und 4	10,7	251	100	151	4	155
Zw. Schicht 4 und 5	9	192	38	154	1	155
Vollständig durchmischt	8	155	0	155	0	155

Die Summe aus Stabilität und Gesamtarbeit ist für diesen Prozeß nicht konstant, sondern nimmt mit zunehmender Durchmischung merklich ab. Dagegen bleibt die maximale Arbeit als Summe von Stabilität und Birges Maß vom Durchmischungsgrad völlig unberührt. Damit wird aber Schmidts Behauptung, das Birgesche Arbeitsmaß sei unbrauchbar, um durch Wind geleistete Durchmischungsarbeit mit zu erfassen [2, S. 156] entkräftet.

IV. Zur Berechnung der Mischungstemperatur.

Die allgemein verwandte Formel zur Berechnung der Mischtemperatur, nämlich

$$\vartheta = \frac{\int_0^z f(z)\, t(z)\, dz}{\int_0^z f(z)\, dz} = \frac{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i t_i}{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i} = \frac{C}{A}$$

ist eigentlich nur eine Näherung, und es erscheint angebracht, eventuelle Fehler, die durch die Vereinfachung der exakten Ableitung begangen werden, aufzuzeigen und abzuschätzen.

Zunächst bedingt die Abhängigkeit der Wasserdichte von der Temperatur ein Massendefizit der höher temperierten Wasserschichten gegenüber den tiefer temperierten. Durch Einführung von $\varrho(t) \quad 1 - \sigma(t)$ wird

$$\vartheta' = \frac{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i t_i - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \sigma_i t_i}{\sum_{i=0}^{n}{}' f_i - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \sigma_i} = \frac{C - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i \sigma_i t_i}{A - D}.$$

Nach dieser Formel wird im allgemeinen $\vartheta' < \vartheta$ ausfallen, da zur Berechnung von ϑ den höher temperierten Schichten ein etwas zu großes Gewicht beigelegt worden ist. Der Unterschied $|\vartheta' - \vartheta|$ beträgt aber nur wenige tausendstel Grad, wie an einigen Temperaturverteilungen errechnet werden konnte.

Eine weitere Korrektur ist möglicherweise wegen der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme des Wassers vorzunehmen.

Die Mischungstemperatur unseres Sees, den wir uns in n gleichtemperierte Schichten zerlegt denken, berechnet sich mit Hilfe einer für den Wärmeinhalt jeder Einzelschicht gültigen Beziehung:

$$M_1 \int_0^{t_1} c\,(t)\,dt + \ldots . + M_n \int_0^{t_n} c\,(t)\,dt = (M_1 + \ldots . + M_n) \int_0^{\vartheta''} c\,(t)\,dt.$$

Wir setzen nun wie oben

$$M_i = V_i\,\varrho\,(t_i) = \frac{f_{i-1} + f_i}{2} \cdot \varrho\,(t_i),$$

weiter

$$\int_0^{t_i} c\,(t)\,dt = w\,(t_i)$$

und

$$\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots . f_{n-1} + \frac{f_n}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n}{}' f_i,$$

dann folgt für den Wärmeinhalt des ganzen Sees unter Benutzung der Simpsonschen Näherungsregel

$$\frac{f_0\,\varrho\,(t_0)}{2} \cdot w\,(t_0) + f_1\,\varrho\,(t_1)\,w\,(t_1) + \ldots .$$
$$+ f_{n-1}\,\varrho\,(t_{n-1})\,w\,(t_{n-1}) + \frac{f_n\,\varrho\,(t_n)\,w\,(t_n)}{2} =$$
$$= w\,(\vartheta'') \cdot \left[\frac{f_0}{2}\,\varrho\,(t_0) + f_1\,\varrho\,(t_1) + \ldots . f_{n-1}\,\varrho\,(t_{n-1}) + \frac{f_n}{2}\,\varrho\,(t_n) \right]$$

oder zusammengefaßt

$$\sum_{i=0}^{n}{}' f_i\,\varrho\,(t_i)\,w\,(t_i) = w\,(\vartheta'') \cdot \sum_{i=0}^{n}{}' f_i\,\varrho\,(t_i) = w\,(\vartheta'') \cdot (A - D).$$

Unter Benutzung des Jäger- v. Steinwehrschen Gesetzes (Gl. 3) wird weiter

$$w\,(t_i) = \int_0^{t_i} c\,(t_i)\,dt = \int_0^{t_i} (\alpha - \beta\,t + \gamma\,t^2)\,dt = \alpha\,t_i - \frac{\beta}{2}\,t_i^2 + \frac{\gamma}{3}\,t_i^3$$

und

$$w\,(t_i) = \alpha\,t_i - k\,(t_i) \cdot t_i,$$

wenn

$$\frac{\beta}{2}\,t_i - \frac{\gamma}{3}\,t_i^2 = k\,(t_i)$$

gesetzt wird.

Nach Einführung von $\varrho\,(t_i) \equiv 1 - \sigma\,(t_i)$ erhalten wir schließlich

$$w\,(\vartheta'') = \frac{1}{A - D}\left(\alpha \cdot \sum_{i=0}^{n}{}' f_i\, t_i - \sum_{i=0}^{n}{}' f_i\,[k\,(t_i) + \sigma\,(t_i)] \cdot t_i\right) = \Theta. \qquad (22)$$

Θ kann aus den geloteten Temperaturdaten des Sees unmittelbar berechnet werden. Gl. (22) stellt eine Bestimmungsgleichung dritten Grades für ϑ'' dar. Eine brauchbare Näherungslösung ergibt sich, wenn man in der Gleichung

$$w\,(\vartheta'') = \alpha\,\vartheta'' - k\,(\vartheta'') \cdot \vartheta'' = \Theta$$

für ϑ'' den Wert Θ einsetzt, was möglich ist, da Θ selbst schon ein Näherungswert für ϑ'' ist: also

$$\vartheta'' = \frac{\Theta}{\alpha} + k\,(\Theta) \cdot \Theta. \qquad (23)$$

Die Größen $k\,(t)$ und $\sigma\,(t)$ seien der Anschaulichkeit halber für einige Temperaturwerte tabelliert:

t ° C	0	5	10	15	20	25
$k \cdot 10^{-6}$	0	1004	1902	2695	3382	3965
$\sigma \cdot 10^{-6}$	132	8	273	874	1770	2929

Man sieht, die Temperaturabhängigkeit der spez. Wärme bedingt eine Verkleinerung der Mischtemperatur im selben Sinn wie die Temperaturabhängigkeit des spez. Volumens. Im Bereich $0{,}5° \leqq t \leqq 31°$ ist der Einfluß von c sogar größer als der von ω.

Durchgerechnete Beispiele ergeben eine maximale Abweichung $\vartheta'' - \vartheta|$ von $15 \cdot 10^{-3}°$, und zwar für sommerliche Temperaturschichtungen, also erreicht der Fehler der Mischungstemperatur und des gesamten Wärmeinhaltes nur die Größenordnung von Promillen, der relative Fehler in der Berechnung von $\sigma\,(\vartheta)$ und daher der Stabilität etwa $^1/_3\%$, was ohneweiters tragbar ist, da bei diesen Rechnungen noch wesentliche größere Fehler anderen Ursprunges in Kauf genommen werden müssen.

V. Die mechanischen Arbeitsgrößen im Wärmeumsatz der Binnenseen.

Der Wärmeumsatz unserer Binnenseen ist ein recht verwickelter Vorgang. Seen, die jährlich zweimal vollkommen umschichten, machen je einen Kreisprozeß im Sommer und im Winter durch. Der sommerliche Kreisprozeß läßt eine Phase der überwiegenden Erwärmung, der überwiegenden Durchmischung und der überwiegenden Abkühlung erkennen, ähnlich der winterliche Kreisprozeß, nur in umgekehrter Reihenfolge. Es gibt aber keinen oder fast keinen Vorgang im Wasser, wo diese drei Elementarprozesse (Erwärmung, Durchmischung, Abkühlung) für sich allein auftreten.

Für unsere Überlegungen können wir jedoch eine solche Trennung vornehmen, indem wir alle Vorgänge mit überwiegender Erwärmung, alle mit überwiegender Durchmischung und schließlich alle mit überwiegender Abkühlung *zusammenfassen* und *nacheinander durchführen*.

Die Wahl des Vorzeichens wird so getroffen: Eine Zunahme (Abnahme) der inneren Energie ($dU = dW + dP$), des Wärmeinhaltes (dW)

und der potentiellen Energie (dP) des Wassers hat das Vorzeichen + (—), eine Wärmemenge (Q), die dem Wasser zugeführt (entzogen) wird, hat das Vorzeichen + (—), eine Arbeitsmenge (A), die vom Wasser verbraucht (geleistet) wird, hat das Vorzeichen + (—).

Der *sommerliche* Kreisprozeß, dessen Ausgangs- und Endpunkt die Isothermie bei 4° C ist, läßt sich stark schematisiert in drei Phasen darstellen:

	dW	+ dP	= A		+ Q
1.	Überwiegende Erwärmung:				
	dW_1	+ $mg\,(\zeta_1 - \zeta_{4°})$ =		$-\,p\cdot\Delta v_1$	+ Q_1
2.	Überwiegende Durchmischung:				
	$-\,dW_2 + dW_r$	+ $mg\,(\zeta - \zeta_1)$ =	A_w	+ $p\cdot\Delta v_2$	$-\,Q_2$
3.	Überwiegende Abkühlung:				
	$-\,dW_3$	$-\,mg\,(\zeta - \zeta_{4°})$ =		$+\,p(\Delta v_1 - \Delta v_2)$	$-\,Q_3$
Σ	0	+ 0 =	A_w	+ 0	$-\,(Q_2 + Q_3 - Q_1)$

Hierbei bedeutet $\zeta_{4°}$ den Schwerpunkt der Wassermasse von einheitlich 4° C (der Koordinatenursprung ist dabei auf den Seegrund verlegt), ζ_1 bzw. ζ den Schwerpunkt der Wassermasse nach Vorgang 1 bzw. 2; p ist der Atmosphärendruck, Δv_1 bzw. Δv_2 die infolge Erwärmung bzw. Abkühlung hervorgerufene Volumsänderung der Wassermasse; die durch Verdunstung entstehenden Massen- und Volumsverminderungen werden nicht berücksichtigt, ebensowenig Massen- und Volumsänderungen durch Niederschlag oder Zu- und Abfluß.

Gleichung 1 besagt:

Die Vorgänge mit überwiegender Erwärmung ($+\,Q_1$) erhöhen die innere Energie des Wassers ($+\,dU$), die sich in eine Erhöhung des Wärmeinhaltes (dW_1) und der Lageenergie [$dP = mg\,(\zeta_1 - \zeta_{4°})$] aufteilt. Einen kleinen Energiebetrag verwendet das Wasser überdies zur Leistung der Ausdehnungsarbeit ($-\,p\cdot\Delta v_1$) gegen den Atmosphärendruck.

Gleichung 2:

Sind die atmosphärischen Bedingungen derart, daß die Wärmeabgabe ($-\,Q_2$) durch Verdunstung und Ausstrahlung und die Arbeitsleistung des Windes verschwinden, so tritt doch ein Ausgleich der Temperaturschichtung infolge Wärmeleitung und Austausch ein, der mit einer Erhöhung der potentiellen Energie ($+\,dP$) und einem Verbrauch von äußerer Arbeit ($+\,p, \Delta v_2$) infolge der beim Mischungsvorgang eintretenden Volumsverminderung vor sich geht. Stärkere Luftbewegung ($A > 0$) vermag die Durchmischung in wesentlich kürzeren Zeiträumen zu leisten, sie verursacht aber einerseits erheblichen Wärmeverlust durch Verdunstung, anderseits wird nur ein Bruchteil der Windarbeit zur Durchmischung der Wassermassen [$mg\,(\zeta_2 - \zeta_1)$] verwendet, der Rest in Reibungswärme verwandelt ($+\,dW_r$).

Gleichung 3:

Ist der Vorgang mit überwiegendem Wärmeentzug verbunden, so erniedrigt sich die gesamte innere Energie des Wassers, der Wärmeinhalt und — durch Tieferwandern des Schwerpunktes — auch die potentielle

Energie. In der oberflächennächsten Schicht kommt dabei der Massenschwerpunkt über den Raumschwerpunkt der Schicht zu liegen, die Schichtung wird daher labil und kippt um. Dieser Vorgang, als Konvektion bezeichnet, bringt auch die tiefsten Schichten zur Durchmischung und führt schließlich zur vollständigen Umschichtung im Herbst.

Unter der Voraussetzung der Konstanz der Wassermassen endet der sommerliche Kreisprozeß also damit, daß der See im Spätherbst dieselbe innere Energie aufweist wie im Frühjahr (bei 4°-Isothermie). Alle verbrauchte Arbeit (A) von äußeren Kräften wird damit in Wärme umgesetzt und mit den bei der Verringerung des Wärmeinhaltes freiwerdenden Wärmemengen abgegeben.

Nun erweitern wir den Kreisprozeß dadurch, daß wir in Gedanken den See in einem beliebigen Temperaturzustand einer vollkommenen Durchmischung unterwerfen. Die entsprechende Gleichung des Energieumsatzes lautet dann:

$$dW \quad + dP \quad = A \quad + Q$$

1. Überwiegende Erwärmung:
$$dW_1 \quad + mg\,(\zeta_1 - \zeta_{4^\circ}) \quad = \quad - p\cdot\Delta v_1 \quad + Q_1$$
2. Überwiegende Durchmischung:
$$-dW_2 + dW_r \quad + mg\,(\zeta - \zeta_1) \quad = A_w + p\cdot\Delta v_2 \quad - Q_2$$
3. Vollständige Durchmischung bei einer bestimmten Temperaturverteilung:
$$-dW_3 + dW_r \quad + mg\,(\bar{\zeta} - \zeta) \quad = \bar{A}_w + p\cdot\Delta\bar{v} \quad - Q_3$$
4. Überwiegende Abkühlung:
$$-dW_4 \quad - mg\,(\bar{\zeta} - \zeta_{4^\circ}) \quad = \quad + p\,(\Delta v_1 - \Delta v_2 - \Delta\bar{v}) \quad - Q_4$$

$$\Sigma \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = A_w + \bar{A}_w + 0 - (Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_1)$$

Der *winterliche* Kreisprozeß für Seetemperaturen $t = 4°$ C wird mit der gedachten Erweiterung durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$dW \quad + dP \quad = A \quad + Q$$

1. Überwiegende Abkühlung:
$$-dW_1 \quad + mg\,(\zeta_1 - \zeta_{4^\circ}) \quad = \quad - p\cdot\Delta v_1 \quad - Q_1$$
2. Überwiegende Durchmischung:
$$-dW_2 + dW_r \quad + mg\,(\zeta - \zeta_1) \quad = A_w + p\cdot\Delta v_2 \quad - Q_2$$
3. Vollständige Durchmischung bei einer bestimmten Temperaturverteilung:
$$-dW_3 + dW_r \quad + mg\,(\bar{\zeta} - \zeta) \quad = \bar{A}_w + p\cdot\Delta v \quad - Q_3$$
4. Überwiegende Erwärmung:
$$dW_4 \quad - mg\,(\zeta - \zeta_{4^\circ}) \quad = \quad + p\,(\Delta v_1 - \Delta v_2 - \Delta\bar{v}) \quad + Q_4$$

$$\Sigma \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = A_w + \bar{A}_w + 0 + (Q_4 - Q_1 - Q_2 - Q_3)$$

Abkühlung einer Wassermasse von einheitlich 4° C verursacht eine Herabsetzung des Wärmeinhaltes um den Betrag der entzogenen Wärme zuzüglich eines Betrages, der zur Leistung der Ausdehnungsarbeit gegen den Atmosphärendruck und zur Vergrößerung der Lageenergie verbraucht wird. Durchmischung geht wiederum unter Vergrößerung der Lageenergie, aber unter Verbrauch der bei der Volumsverminderung vom Atmosphärendruck geleisteten Arbeit vor sich. Erwärmung bedingt schließlich Erhöhung der inneren Energie ($+ dU$) bei gleichzeitiger Verringerung der Lageenergie und Verbrauch der äußeren Arbeit des Atmosphärendruckes. Die Verringerung der potentiellen Energie führt in den oberflächennahen Schichten zu Instabilität und, da die Erwärmung hauptsächlich durch Strahlungsabsorption erfolgt, an der keineswegs die Oberfläche allein beteiligt ist, zu einer besonders wirksamen und tiefgreifenden Durchmischung bzw. Umschichtung zu Frühjahrsbeginn. Die zur Wiederherstellung des Ausgangszustandes notwendige Erwärmung ist zum Winterende um den Betrag der Mischungsarbeit ($A_w + \bar{A}_w$) geringer als die gesamte abgegebene Wärmemenge.

Unter bewußtem Verzicht auf nähere Einzelheiten des Wärmeumsatzes gewinnen wir durch die beiden Gleichungssysteme des winterlichen und sommerlichen Kreisprozesses Einblick in das Wesen der sogenannten „mechanischen Arbeitsgrößen" eines Sees. Wir verstehen unter ihnen die Änderung der potentiellen Energie der Gesamtwassermasse, die Arbeit der Scherkraft des Windes an der Wasseroberfläche und die bei der Ausdehnung (Schrumpfung) des Wassers gegen (durch) den Atmosphärendruck geleistete Arbeit. Im engeren Sinn wird allerdings nur die Veränderung der potentiellen Energie, d. i. die gegen das Eigengewicht bei der Massenumlagerung zu leistende Arbeit darunter verstanden. *Insbesondere wird die Größe* $mg\,(\zeta - \zeta_{4°})$ *als Birgesches Arbeitsmaß, der Ausdruck* $mg\,(\bar{\zeta} - \zeta)$ *als Stabilität (nach W.* Schmidt*) und die Größe* $mg\,(\bar{\zeta} - \zeta_{4°})$ *als maximale Arbeit bezeichnet.*

Um über die Größenordnung der kalorischen und mechanischen Energiebeträge, die im sommerlichen Kreisprozeß zum Umsatz gelangen, zu orientieren, sei ein Beispiel durchgerechnet:

Gegeben sei eine Wassersäule von 1 qcm Querschnitt und Z cm Höhe. Der Ausgangszustand sei Isothermie von 4° C, der Endzustand Isothermie von 14° C (diese Durchschnittstemperatur wird in den österreichischen Alpenseen höchstens erreicht). Im Anfangszustand beträgt das Volumen der Wassersäule $V = Z$ ccm, das Gewicht Z g*, der Wärmeinhalt $4\,Z$ cal, die potentielle Energie $^1/_2 Z^2$ g*cm; im Endzustand entsprechend das Volumen $Z \cdot [1 + \sigma\,(14°)]$ ccm, das Gewicht Z g*, der Wärmeinhalt $Z \cdot 14$ cal und die potentielle Energie $^1/_2 Z^2 [1 + \sigma(14°)]$ g*cm. Der Übergang vom Anfangs- zum Endzustand ist demnach verbunden mit einer Zunahme des Wärmeinhaltes dW um $10\,Z$ cal, mit einer Zunahme der potentiellen Energie dP um

$$\frac{Z^2}{2} \cdot \sigma\,(14°)\ \text{g*cm} = 365 \cdot 2{,}34 \cdot 10^{-11}\, Z^2\ \text{cal}$$

und mit einer Ausdehnungsarbeit gegen den Atmosphärendruck $p \cdot \Delta v$ von

$$1000 \cdot \sigma\,(14°) \cdot Z\ \text{g*cm} = 729 \cdot 2{,}34 \cdot 10^{-8}\, Z\ \text{cal}.$$

Es verhalten sich also

$$\frac{dW}{dP} = 1{,}17 \cdot 10^{9} \cdot Z^{-1} \qquad \frac{dP}{p \cdot \Delta v} = \frac{Z}{2 \cdot 10^{3}}.$$

Für verschiedene Werte von Z insbesondere

$Z =$	10^3	10^4	10^5 cm
$\frac{dW}{dP}$	$1{,}17 \cdot 10^6$	$1{,}17 \cdot 10^5$	$1{,}17 \cdot 10^4$
$\frac{dP}{p \cdot \Delta v}$	0,5	5	50

In der Energiebilanz der Seen spielen die mechanischen Arbeitsgrößen ihrem Betrage nach nur eine ganz untergeordnete Rolle, da sie, gemessen an den umgesetzten Wärmemengen, nur ungefähr von der Größenordnung 10^{-6} bis 10^{-5} sind. Über die tatsächlich aufgewendete Windarbeit, die sich ja nur zum geringeren Teil in Erhöhung der potentiellen Energie des Wassers umsetzt, stehen Messungen an Binnenseen noch aus. Die Ausdehnungsarbeit gegen den äußeren Luftdruck ist für eine Wassersäule von weniger als 20 m Mächtigkeit größer, für tiefere Wassersäulen dagegen kleiner als die gleichzeitig mit der Erwärmung und Ausdehnung eintretende Erhöhung der potentiellen Energie.

Die wahre Bedeutung der „mechanischen Arbeitsgrößen" haben bereits Birge und W. Schmidt eingehend dargelegt, sie haben insbesondere auf den durch die Windarbeit besorgten Transport großer Wärmemengen von der Oberfläche in die Tiefe hingewiesen. Ohne diesen Transport, der mit verhältnismäßig geringem Energieaufwand durchgeführt wird, bliebe der Umsatz der Wärmemengen in unseren Seen weit hinter dem tatsächlichen zurück. Absolut genommen und in mechanischem Maß ausgedrückt sind die vom Wind geleisteten Arbeitsmengen sehr beachtlich.

Rechnerisch geben die mechanischen Arbeitsgrößen ein willkommenes Mittel, um einerseits die vom Wind geleistete Mindestarbeit bei der Durchmischung von Wassermassen zu berechnen, anderseits den Durchmischungsgrad eines Gewässers aus der vorgegebenen Temperaturverteilung zu ermitteln.

Literaturverzeichnis.

1. Landolt-Börnstein: Phys.-chem. Tabellen. 5. Aufl.
2. Schmidt, W.: Über die Temperatur- und Stabilitätsverhältnisse von Seen. Geogr. Ann. **1928**.
3. Birge, E. A.: The work of wind in warming a lake. Translat. Wisconsin Acad. of sciens, arts and letters **18**, Teil II, 341 (1916), zit. nach W. Schmidt.

55.038.2

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Beitrag zur Methodik der magnetischen Landesaufnahme.

Von

M. Toperczer.

Zusammenfassung. Ohne auf Einzelheiten zunächst näher einzugehen, werden die für die magnetische Landesaufnahme wichtigen Grundbegriffe und ihre Hauptaufgabe einer eingehenderen Diskussion unterzogen. Jede magnetische Aufnahme hat heute eine doppelte Bedeutung, einmal einen Beitrag zur Kenntnis des gesamten Erdfeldes zu liefern, anderseits die Grundlagen für eine weitere Erforschung der obersten Erdschichten nach den Methoden der angewandten Geophysik zu geben. Daraus ergeben sich die verschiedenen Bedeutungen, die den einzelnen gemessenen Werten zukommen und zwischen denen zu unterscheiden ist. Es ist Wert darauf gelegt worden, gewisse Grundbegriffe, wie räumliche Reichweite und Repräsentativität eines Meßpunktes, Gültigkeitsbereich der Angaben eines Observatoriums in räumlicher und zeitlicher Beziehung möglichst klar zu fassen und darzustellen, sowie alle wesentlichen Maßnahmen anzugeben, durch die derartige Aufnahmen unter sich vergleichbar werden.

Summary. Without entering into details first of all the fundamental principles of magnetic topography and its main task are thoroughly discussed. Each magnetic surveying is to-day of double importance: on the one hand it contributes to the knowledge of the whole terrestrial magnetic field, on the other hand it lays the foundations for a further exploration of the uppermost layers of the earth according to the methods of applied geophysics. Single observations may therefore be of different importance. Great value was attached to formulating and describing as clear as possible certain fundamental principles such as spacial reach and representativity of a measuring point, validity range of data of an observatory, both spacial and temporal, and to giving all essential measures by which such topographies become mutually comparable.

Résumé. Sans donner des détails on discute à fond tout d'abord les principes fondamentaux de la levée magnétique et sa tâche principale. Chaque levée magnétique a aujourd'hui une double importance, premièrement de contribuer à la connaissance du champ magnétique terrestre total, deuxièmement de livrer les bases pour une exploration plus vaste des couches terrestres supérieures d'après les méthodes de la géophysique appliquée. C'est pour-

quoi les observations individuelles peuvent avoir une importance différente. Une grande valeur a été attachée à formuler et décrire le plus clairement possible certains principes fondamentaux, comme la portée spatiale et la représentativité d'un point de mesure, le domaine de validité des données d'un observatoire dans l'espace et dans le temps, et à indiquer les précautions à prendre pour rendre comparables les différentes topographies.

Die nachstehenden Ausführungen haben den Zweck, einige Grundsätze, die für die Anlage und Ausführung magnetischer Landesvermessungen bedeutungsvoll sind, zusammenhängend darzustellen. In den letzten 25 Jahren ist eine ganze Reihe von modernen Landesvermessungen durchgeführt worden, die Grundsätze, die für sie und die Verarbeitung ihrer Ergebnisse maßgebend waren, sind teilweise in den entsprechenden Veröffentlichungen dargelegt. Eine zusammenfassende Darstellung der methodischen Gesichtspunkte für die Ausführung einer magnetischen Landesaufnahme ist mir aber nicht bekannt. Ich bin mir vollständig bewußt, daß die nachstehenden Ausführungen keineswegs auf Vollständigkeit Anspruch erheben können; dies um so weniger, als vieles aus der ausländischen Literatur uns heute noch unzugänglich und unbekannt ist.

Ein möglichst hoher Grad von Einheitlichkeit bei der Durchführung und Bearbeitung magnetischer Landesaufnahmen ist aber unbedingt anzustreben, um ein wenigstens hinsichtlich der Grundlagen und Ausgangsdaten vergleichbares Material zur Darstellung des magnetischen Kraftfeldes zu erhalten.

Abgesehen von allen praktischen Anforderungen besteht die Aufgabe der magnetischen Landesaufnahme vom Standpunkt der reinen Geophysik darin, die *räumliche* Verteilung des *permanenten* magnetischen Feldes im Aufnahmegebiet festzustellen. Dabei ist eine Landesaufnahme nur die Teillösung des Hauptproblems, nämlich die Verteilung des permanenten Feldes über die ganze Erde kennenzulernen. Als gelungen kann eine Landesaufnahme daher nur dann bezeichnet werden, wenn sie einen wesentlichen und richtigen Beitrag zur Lösung dieses Problems liefert.

Das permanente Feld stellt dabei einen physikalisch sinnvoll definierten mittleren Zustand des magnetischen Erdfeldes dar. Praktisch wird es gewöhnlich durch die räumliche Verteilung der Normalwerte der magnetischen Feldgrößen für eine bestimmte Epoche definiert, und als Normalwert gewöhnlich das wahre Jahresmittel verwendet.

Messungstechnisch kann die Aufgabe der Landesaufnahme nur in der Form verwirklicht werden, daß an einzelnen, diskreten Stellen, den Meßpunkten, Momentanwerte der magnetischen Elemente bestimmt werden. Aus den Momentanwerten sind dann die Normalwerte abzuleiten, aus den Ergebnissen an einzelnen Meßpunkten die räumliche Verteilung des Feldes. Die richtige Durchführung dieser Aufgaben setzt eigentlich die Kenntnis des zu bestimmenden Feldzustandes voraus. Aus den Momentanwerten sind die Normalwerte nur bei genauerer Kenntnis des zeitlichen Verlaufes der Feldgrößen am Orte der Messung

abzuleiten, aus den einzelnen Meßpunkten kann die räumliche Feldverteilung nur bei annähernder Kenntnis des wahren Feldverlaufes ermittelt werden.

Die Flächen der einzelnen Aufnahmegebiete sind meist im Verhältnis zur Oberfläche der Erde sehr klein, die einzelnen Aufnahmen erfolgen zu verschiedenen Zeitpunkten. Daraus ergibt sich die Forderung, daß im Hinblick auf den anzustrebenden Zweck der Erfassung des Gesamtfeldes der Erde eine jede Aufnahme auch in sich alle jene Maßnahmen enthalten muß, die gestatten, die einzelnen Teiluntersuchungen unter sich zu einem geschlossenen Ganzen zu verbinden.

Unsere heutige Kenntnis vom Gesamtfeld der Erde gleicht einem Mosaikbild, das sich aus den Beiträgen der einzelnen Aufnahmen, die zu verschiedenen Zeitabschnitten und nicht immer in der gleichen Weise ausgeführt wurden, zusammensetzt. Der anzustrebende Idealzustand wäre, die Feldverteilung der gesamten Erde einmal als ein Gemeinschaftswerk aller Kulturnationen in einem einheitlich festgelegten Zeitabschnitt nach den gleichen Methoden auszuführen.

Als Beobachter des erdmagnetischen Feldes, dessen Verteilung uns die charakteristischen Parameter des magnetischen Zustandes der ganzen Erde liefern soll, befinden wir uns in einer vom Standpunkt der Potentialtheorie ungünstigen Lage. Denn wir müssen alle unsere Beobachtungen auf der Oberfläche des Körpers, dessen Parameter wir bestimmen wollen, ausführen. Das Feld im Innenraum der Erde ist der Messung unzugänglich und es ist uns ebenso unmöglich, im Außenraum in einiger Entfernung von der Erdoberfläche magnetische Messungen ausreichender Schärfe bei dem heutigen Stand unserer Hilfsmittel auszuführen.

Meßtechnisch entspricht unser Vorgehen dem eines Beobachters, der, um die Parameter eines Stabmagneten zu bestimmen, die Feldverteilung an dessen Oberfläche mißt. Alle Abweichungen vom einfacheren Fall des regulären Magneten werden hier stärker in Erscheinung treten. Zweifellos ist die Kenntnis des Oberflächenfeldes für uns notwendig und wichtig, da es eben das Feld unseres Lebensraumes ist, anderseits aber werden sich aus seiner Kenntnis allein die Parameter der Potentialentwicklung, die den magnetischen Zustand der Erde für einen bestimmten Zeitpunkt darstellt, nur mit einem geringeren Grad von Zuverlässigkeit bestimmen lassen, als wenn wir auch noch die Feldverteilung in größerer Entfernung vom magnetisierten Körper kennen würden.

Ferner ist noch zu beachten, daß die Gesamtfläche eines Aufnahmegebietes stets im Verhältnis zur Oberfläche der Erde (510×10^6 qkm) klein ist: sie sind ja derzeit noch an Staatsgrenzen gebunden. Aber auch die größten Staatswesen wie die Vereinigten Staaten von Nordamerika oder die Sowjetunion bedecken nur verhältnismäßig geringe Teile der Erdoberfläche, nämlich 1,5 bzw. 4,2% derselben.

Die räumliche Verteilung des magnetischen Feldes in einem Untersuchungsgebiet kann unmittelbar nicht als eine Funktion des Ortes beobachtet werden, sondern nur stichprobenartig durch Messungen an einzelnen, diskreten Punkten erfaßt werden. Diesen Meßwerten kommt

nun im Hinblick auf die spätere Verwertung eine doppelte Bedeutung zu. Einmal soll durch sie möglichst genau das *wahre* Feld im Untersuchungsgebiet, z. B. mit Rücksicht auf alle Zwecke der angewandten Geophysik erfaßt werden. Anderseits soll durch sie ein gewisser räumlicher Mittelwert der Feldverteilung im Untersuchungsgebiet, den man als *terrestrisches* Feld bezeichnet, möglichst sicher erfaßt werden. Denn ebensowenig wie ein einzelner Momentanwert für eine weitere Verarbeitung verwendet werden kann, ist ein beliebiger Punktwert für eine weitere Verwendung bei allen Untersuchungen, die das gesamte Erdfeld betreffen, unmittelbar zu gebrauchen. Der störende Einfluß der verschiedenen Beschaffenheit der obersten Erdrinde, die Lokalstörungen, müssen zunächst aus den Messungsergebnissen beseitigt werden.

Im Hinblick auf diese verschiedene Bedeutung eines Einzelwertes wird auch die Zahl der erforderlichen Meßwerte eine verschiedene sein. In bezug auf die Untersuchung des gesamten Erdfeldes sind auch bei einer sehr weitmaschigen Vermessung noch die Abstände zwischen den einzelnen Meßpunkten als Differentiale anzusehen; die individuellen, lokalen Eigentümlichkeiten des Feldes spielen hier eine geringe Rolle. Anders ist es bei Festlegung des wahren Feldverlaufes. Hier hängt offenbar die erforderliche Meßpunktdichte unmittelbar mit den individuellen Eigenschaften des Feldes zusammen.

Das vorliegende Problem besteht also darin, durch eine möglichst geringe Anzahl entsprechend ausgewählter Punkte die räumliche Verteilung des zu untersuchenden Feldes möglichst gut zu erfassen. Diese Aufgabe wird im Falle des magnetischen Feldes noch dadurch erschwert, daß es sich hier um ein Vektorfeld handelt. Gemessen werden die einzelnen Bestimmungsstücke des Vektors; doch dürfen nun diese einzelnen Bestimmungsstücke nicht einzeln für sich, sondern nur in ihrem übergeordneten Zusammenhang behandelt werden.

Jedem einzelnen Meßpunkt kommt ein bestimmter Bereich zu, innerhalb dessen der am Meßpunkt ermittelte Wert des magnetischen Vektors das Feld genügend genau beschreibt. Für diesen Bereich ist der gemessene Wert der magnetischen Feldgröße repräsentativ.

Ist also e_P der Wert eines magnetischen Elements am Punkte P und ist ferner e der Wert desselben Elements in einem beliebigen Punkt der Umgebung von P, so muß innerhalb des Bereiches, für den e_P repräsentativ sein soll, gelten:

$$|e - e_P| \leqq \eta, \tag{1}$$

wobei durch η der mögliche Genauigkeitsanspruch, mit dem ein Wert von e überhaupt nur erhalten werden kann, definiert ist. Wegen der im allgemeinen langsamen Änderung des Feldes mit dem Orte erscheint das Abbrechen der Reihenentwicklung nach dem Gliede 1. Ordnung zulässig und es gilt daher, wenn s eine beliebige Fortschreitungsrichtung aus dem Punkte P bedeutet:

$$e = e_P + \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_P \cdot \Delta s. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$|\operatorname{grad} e \cdot \Delta \hat{s}| \leqq \eta. \tag{3}$$

Dies ist also die Bestimmungsgleichung für die Größe des Repräsentabilitätsbereiches um den Punkt P. Dabei genügt es, den Gradienten zweidimensional zu bilden und die Erdoberfläche in der Umgebung von P als eben zu betrachten. Für die praktische Anwendung kann die Gl. (3) auch in der Form

$$|\operatorname{grad} e| \cdot \Delta s \leqq \eta \tag{3a}$$

geschrieben werden. Der Repräsentabilitätsbereich wird dadurch verkleinert, doch wird die Gebietseinteilung dadurch übersichtlicher, da nun an die Stelle unregelmäßiger Gebiete Kreise treten, die wiederum unbedenklich bei der praktischen Anwendung durch entsprechende Rechtecke ersetzt werden können (Gittereinteilung).

Die Größe des Gebietes, für das ein Meßpunkt repräsentativ ist, hängt unmittelbar von der Größe des Gradienten ab.

Aus der hier definierten Repräsentabilität folgt auch, daß die Bedingung der Interpolierbarkeit überall erfüllt ist. Sind nämlich A und B zwei benachbarte repräsentative Punkte, so kann für jeden zwischenliegenden Punkt C innerhalb ihrer Bereiche der Wert e_C mit der vorgeschriebenen Genauigkeit interpoliert werden. Denn ist e_C der unmittelbar gemessene Wert und ist e_C' der interpolierte Wert, so gilt

$$e_C - e_C' \leqq \eta.$$

Diese Überlegungen beziehen sich zunächst auf die Bestimmung des wahren magnetischen Feldes und können zweckmäßig angewendet werden bei der Bestimmung der Felder von Störungskörpern, bei denen es besonders auf möglichst genaue Festlegung der Lage und Größe der Extreme und sonstiger singulärer Punkte des Feldes ankommt.

Die gewöhnliche Landesaufnahme hat aber meist nicht den Zweck, wenigstens nicht im Hinblick auf die Festlegung des gesamten Erdfeldes, eine möglichst genaue Festlegung des wahren Feldes zu geben. Sie begnügt sich, an Stelle des wahren Feldverlaufes einen vereinfachten Feldverlauf, nämlich den des terrestrischen oder normalen Feldes im Aufnahmegebiet zu geben. Die Vereinfachung muß nur auch so erfolgen, daß aus ihr schließlich bei der Bestimmung des gesamten Erdfeldes kein merklicher Fehler entsteht.

Das Wesentliche, dem Feldverlauf im gesamten Untersuchungsgebiet Gemeinsame soll durch das terrestrische Feld dargestellt werden. Da aber die Fläche des Untersuchungsgebietes, wie schon erwähnt wurde, meist sehr klein ist im Verhältnis zur Gesamtfläche der Erde selbst, so ist diese Aufgabe schon mit einer wesentlich geringeren Anzahl von Meßpunkten lösbar als zur wirklichen Darstellung des wahren Feldes erforderlich sind. Bei der Auswahl dieser Stationen, die wir hier als Stationen 1. Ordnung bezeichnen wollen, sind wieder gewisse Voraussetzungen zu erfüllen. Sie sollen das Vermessungsgebiet möglichst gleichmäßig bedecken; ihr Repräsentabilitätsbereich soll ein möglichst großer sein,

um eine möglichst richtige Annäherung an die wahren Feldverhältnisse zu gewährleisten. Es sind also alle Punkte mit starken Lokalstörungen auszuschließen, da deren Werte nur für einen kleinen Bereich gelten.

Geometrisch betrachtet läuft die gestellte Aufgabe darauf hinaus, die wahre Feldverteilung, die wir uns für jede einzelne Vektorkomponente durch eine beliebig gestaltete Fläche

$$e = e(\varphi, \lambda) \tag{4}$$

dargestellt denken können, durch eine mathematisch möglichst einfach zu behandelnde Fläche zu ersetzen, die sich der Fläche der wahren Werte möglichst gut anschmiegt. Es besteht hier ungefähr die gleiche Beziehung zwischen wahrem und terrestrischem Feld wie in der Theorie der Schwerkraft zwischen Geoid und Niveausphäroid. Nur daß im Falle des magnetischen Feldes gewisse Schwierigkeiten, schon wegen der zeitlichen Veränderlichkeit des Feldes, größer sind als im Falle der Schwerkraft.

Wir ersetzen also den wahren Feldverlauf (4) durch das terrestrische Feld, gegeben durch

$$E = E(\varphi, \lambda). \tag{5}$$

Die entstehenden Differenzen $e - E = \Delta e$ müssen noch irgend einer Bedingung unterworfen werden, um zu bewirken, daß das terrestrische Feld eine möglichst gute Annäherung an das wahre Feld gibt.

Dabei ist zu bedenken, daß eine jede mathematische Bedingung, die wir hier einführen, auch gleichzeitig eine *physikalische* Bedeutung hat, das terrestrische Feld somit in systematischer Weise entstellen kann, indem es ihm Eigenschaften verleiht, die es in Wirklichkeit gar nicht besitzt.

Während wir heute an der physikalischen Realität des Außenanteiles kaum zu zweifeln geneigt sein werden, da es hiefür nicht nur Hinweise vom Standpunkt der erdmagnetischen Feldtheorie gibt, ist die Existenz des potentiallosen Anteils in keiner Weise erwiesen. Die ihm entsprechenden Vertikalströme widersprechen vielmehr aller direkten Erfahrung auf luftelektrischem Gebiet.

Schon A. Schmidt [*1*] hat daher bei der Bearbeitung der Landesaufnahme von Preußen die Bedingung aufgestellt, daß das terrestrische Feld aus den Messungen an den einzelnen Stationen nicht nur nach der Methode der kleinsten Quadrate abzuleiten sei, sondern daß es auch frei von einem potentiallosen Anteil sein müsse. Die rechnerische Durchführung dieser Aufgabe ist auch heute noch vorbildlich.

Die Bedingung $\Sigma(\Delta e)^2 = \text{Min.}$ für alle Komponenten des Feldes allein genügt nicht; denn die Komponenten des Feldes sind nicht unabhängig voneinander. Sie dürfen daher auch nicht einzeln, als ob es sich um Skalare handeln würde, ausgeglichen werden. Wir dürfen durch die Ausgleichung aber auch keine wesensfremde, ursprünglich nicht vorhandene Eigenschaft dem Felde beilegen, sonst verstoßen wir gegen das oberste Erkenntnisprinzip physikalischer Forschung überhaupt, keine unnützen Hypothesen und die daraus folgenden Scheinprobleme zu erzeugen.

Es handelt sich nun noch darum, eine Bedingung anzugeben, die geeignet ist, dafür als Kriterium zu dienen, daß im terrestrischen Feldausdruck der durchschnittliche Feldverlauf hinreichend dargestellt wurde.

Wäre der Verlauf des wahren Feldes genau bekannt, also (4) gegeben, so ist mit Hilfe der vorgegebenen Bedingungen, nämlich der rein formellen, nach möglichst gutem Anschließen und der physikalischen nach Verschwinden des potentiallosen Anteils, das terrestrische Feld (5) in eindeutiger Weise daraus abzuleiten.

Da die Aufnahmegebiete im allgemeinen als klein betrachtet werden können, wird für die Darstellung des terrestrischen Feldes eine Potenzreihenentwicklung nach Potenzen der Koordinatendifferenzen gegen einen zentral im Darstellungsgebiet gelegenen Ausgangspunkt (φ_0, λ_0) ausreichen. Diese Entwicklung hat also folgende Form:

$$E = E_{00} + E_{10} \cdot \Delta\varphi + E_{01} \cdot \Delta\lambda + E_{20}\Delta\varphi^2 + E_{11}\Delta\varphi\Delta\lambda + E_{02}\Delta\lambda^2 + \ldots .$$
$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0, \qquad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0. \tag{6}$$

Die nach den Methoden der Ausgleichsrechnung numerisch bestimmten Koeffizienten E_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots)$ bestimmen Gefälle und Krümmung der Feldkomponenten des terrestrischen Feldes im Darstellungsgebiet. In der praktischen Anwendung wird auch im Falle eines größeren Gebietes die Entwicklung (6) nicht über Glieder 2. Ordnung ausgedehnt, für kleinere Gebiete begnügt man sich meist mit einer linearen Formel, die einer Tangentialebene an die durch (6) dargestellten Fläche entspricht. Da die Felddarstellung (6) als bestanschließende Fläche nach der Ausgleichsrechnung bestimmt ist, nimmt die Güte der Darstellung gegen den Rand des Darstellungsbereiches hin im allgemeinen ab.

Das mathematische Kriterium dafür, daß durch den Ausdruck (6) tatsächlich die wesentlichen Züge des terrestrischen Feldverlaufes erfaßt sind, liegt darin, daß bei einer weiteren Steigerung der Stationszahl im Ausgangsmaterial über eine bestimmte Zahl N die Darstellungsformel invariant wird gegenüber der Steigerung der Stationszahl n. Mit zunehmender Stationszahl konvergieren also die Koeffizienten der Entwicklung gegen bestimmte Grenzwerte, der mittlere Fehler der Darstellung sinkt nur mehr ganz unwesentlich. In ihm drückt sich dann eine wesentliche Eigenschaft des terrestrischen Feldes aus, nämlich seine mittlere Abweichung vom Verlauf des wahren Feldes. Man kann daher diesen mittleren Fehler auch als „mittlere Gestörtheit" bezeichnen. Wegen des mathematisch einfachen Charakters des terrestrischen Feldes genügt schon eine kleine Zahl von Stationen, um die Verteilung des terrestrischen Feldes ausreichend sicher zu bestimmen.

Im Durchschnitt wird zur Bestimmung des terrestrischen Feldes eine Punktdichte von einem Meßpunkt auf 1000 bis 2000 qkm ausreichend sein. Die Punkte sollen nur möglichst gleichmäßig verteilt und frei von Lokalstörungen sein.

Für die technische Durchführung einer Landesaufnahme ist nun der Weg klar vorgezeichnet. Die Bestimmung des wahren Feldes kann nicht auf einmal erfolgen, da die zu leistende Arbeit zu groß ist. Es kann

zunächst nur ein Grundnetz von Stationen geschaffen werden, aus dem einmal der Verlauf des terrestrischen Feldes bestimmt werden kann und das auch die Angaben über den mittleren Störungscharakter des vermessenen Gebietes liefert. Nach dem üblichen Sprachgebrauch sollen diese Meßpunkte als Stationen 1. Ordnung bezeichnet werden. An diesen Stationen 1. Ordnung sind die Bestimmungsstücke des magnetischen Feldvektors mit möglichst großer Genauigkeit nach einer absoluten Methode zu bestimmen. Diese Punkte bilden dann weiter die Ausgangspunkte für die magnetische Detailvermessung zur Erfassung des wahren Feldes. Als Meßmethoden wird man hier möglichst rasch zum Ergebnis führende Verfahren einsetzen. Zur raschen Bestimmung von H- und Z-Differenzen stehen hier die Feldwaage zur Verfügung, zur raschen Bestimmung von H das QHM nach La Cour. Dort, wo ein hinreichend dichtes Netz trigonometrischer Punkte vorhanden ist, kann auch D gemessen werden.

Durch diese zusätzliche Bestimmung des Feldverlaufes zwischen dem Netz der Punkte 1. Ordnung ergeben sich für die Werte der Feldvektoren an den Punkten 1. Ordnung weitere Verbesserungen. So wird z. B. nach der absoluten Methode der Wert von Z an einem Punkt 1. Ordnung (auf dem meist gebräuchlichen Umweg über H und I) mit einer geringeren absoluten Genauigkeit bestimmt, als sie bei der Bestimmung der Differenz ΔZ zwischen zwei solchen Punkten nach der relativen Methode möglich ist, obgleich die relativen Fehler bei der absoluten Methode geringer sind.

Selbstverständlich werden bei einem solchen Verfahren auch alle gröberen Meßfehler aufgedeckt, weil dadurch die ursprünglich vereinzelten und an jedem Punkt für sich erfolgten Bestimmungen des magnetischen Feldvektors unter sich verbunden und zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Für die Ausgleichung dieser Messungen gelten die gleichen Grundsätze wie für die Punkte 1. Ordnung. Auch hier ist die Bedingung, daß das Feld frei von potentiallosen Anteilen sein soll, beizubehalten. Die Potentialbedingung gestattet, entlang geschlossener Kurvenzüge die in die Horizontalebene fallende Feldkomponente bei Unterbestimmung durch Messung interpolatorisch zu ergänzen.

Die Bestimmung des wahren Feldverlaufes sollte soweit durchgeführt werden, um alle größeren Störungskörper innerhalb des Vermessungsgebietes mit Sicherheit feststellen und wenigstens in annäherndem Umriß abgrenzen zu können. Im allgemeinen wird hier eine Flächendichte von einem Punkt auf 25 qkm ausreichend sein.

Diese Art der Vermessung, die wir als Vermessung 2. Ordnung bezeichnen wollen, leitet über zu der Spezialaufnahme geologischer Störungskörper im besonderen, wie sie für die Zwecke der angewandten Geophysik ausgeführt werden, und die wir Vermessung 3. Ordnung nennen wollen.

Für alle praktischen Fragen der angewandten Geophysik sind die Vermessungen, die auf die Erfassung des wirklichen Feldverlaufes abzielen, von größter Bedeutung. Aber erst die aus der Aufnahme 1. Ord-

nung folgende Kenntnis des terrestrischen Feldes gibt die Möglichkeit, das wahre Feld in Normalfeld und Störungsfeld zu zerlegen. Aus der Kenntnis des Störungsfeldes, d. h. jenes Feldanteiles, der durch die Wirkung der an der Untersuchungsstelle vorhandenen magnetisierten Körper zusätzlich erzeugt wird, sind erst richtige Schlußfolgerungen über Beschaffenheit, Gestalt und Ausdehnung der störenden Massen zu ziehen.

Eine möglichst eingehende Vermessung des magnetischen Feldes liegt aber auch im allgemeinen Interesse, da die Erforschung des Bodens und seiner Strukturverhältnisse heute von größter praktischer Bedeutung für seine richtige Nutzung und Verwertung ist. Unter allen geophysikalischen Untersuchungsverfahren ist aber das nach der magnetischen Methode noch immer das am schnellsten auszuführende. Es reicht in den meisten Fällen aus, dann jene Stellen auszusondern, an denen zur Vervollständigung der Untersuchung die anderen Verfahren der Geophysik einzusetzen sind.

Je genauer der wahre Feldverlauf bekannt ist, um so besser wird auch die Erfassung des terrestrischen oder normalen Feldes in einem Gebiete gelingen. Zur Ableitung des terrestrischen Feldes werden zweckmäßigerweise zunächst nicht die Einzelstationen selbst herangezogen, sondern diese für einzelne Teilgebiete zu Normalstationen zusammengefaßt. Für diese einzelnen Teilgebiete ist die damit gemachte Annahme, daß in ihnen der terrestrische Feldverlauf als lineare Ortsfunktion angesehen werden kann, ohne weiteres zulässig. Erst aus diesen Normalstationen, in denen die Messungsergebnisse eines Teilgebietes zusammengefaßt sind, ist dann die terrestrische Feldverteilung numerisch abzuleiten.

Zur Ableitung der terrestrischen Feldverteilung geht man wegen der bei der Ausgleichung zu beachtenden Potentialbedingung nicht von den direkt gemessenen Elementen (in den meisten Fällen wird dies D, H und I sein) aus, sondern von den rechtwinkligen Vektorkomponenten X, $Y \cos \varphi$ und Z, auf die die Potentialbedingung unmittelbar anzuwenden ist. Die Normalverteilung für die übrigen Elemente und Komponenten ist dann aus den Normalwerten für X, $Y \cos \varphi$ und Z direkt abzuleiten. Sie sind nicht gesondert für sich auszugleichen, da sonst Widersprüche in den durch sie gegebenen Darstellungen des Gesamtfeldes auftreten würden. Durch die numerische Festlegung dreier Komponenten ist die Feldverteilung festgelegt und aus dieser einmal festgestellten Normalverteilung sind dann die Verteilungen für die anderen Feldgrößen nur mehr rein rechnerisch auf Grund der bereits gegebenen Werte der drei Komponenten zu ermitteln.

Durch die Feldmessungen an den einzelnen Stationen werden zunächst nur Momentanwerte des Feldzustandes an dem betreffenden Meßpunkt erhalten. Diese sind unter sich, weil ihre Bestimmung an verschiedenen Stationen des Aufnahmegebietes im allgemeinen nicht gleichzeitig erfolgt, nicht vergleichbar. Aber auch für den Fall, daß an allen Meßorten die Bestimmung des Feldes gleichzeitig vorgenommen worden wäre, würde der Kenntnis dieser Feldverteilung, die einer Momentphotographie

des Feldzustandes im Aufnahmegebiet entspräche, nur ein sehr bedingter Wert zukommen. Die räumliche Verteilung des Feldes würde zwar durch ein derartiges System momentaner Werte richtig wiedergegeben, d. h. die erhaltenen Ortsdifferenzen gegen einen gewählten Ausgangspunkt wären alle, fehlerfreie Bestimmung der Elemente vorausgesetzt, richtig; einer solchen Verteilung würde aber ein sehr wesentlicher Übelstand anhaften, nämlich der, daß aus einer solchen Werteverteilung eine Feldverteilung für einen früheren oder späteren Zeitpunkt nur sehr umständlich und auch ungenau zu erhalten wäre. Im momentanen Feldzustand zu einem beliebigen Zeitpunkt ist der Einfluß aller zeitlichen Veränderungsbestandteile des magnetischen Feldes in einer einmaligen, also singulären Weise vereinigt. In welcher Art aus diesem Momentanzustand irgend ein folgender oder vorhergehender abzuleiten ist, ist aber im einzelnen nicht angebbar. Das, was bekannt und gesetzmäßig erfaßbar ist, ist nur das mittlere Verhalten im zeitlichen Ablauf der Feldänderungen.

Wir müssen also die erhaltenen Momentanwerte rechnerisch auf einen bestimmten mittleren Feldzustand beziehen, denn nur über die zeitliche Änderung der mittleren Feldzustände können wir bestimmte Aussagen machen. Für die mittleren Feldzustände können wir aber auch die Variationsbreite angeben, innerhalb deren sich voraussichtlich der mittlere von dem wahren Zustand unterscheiden wird. Darin liegt der große Vorteil der mittleren Feldzustände. Welcher mittlere Feldzustand zugrundegelegt wird, ist Definitionssache. Wäre unsere Kenntnis von der Ursache und dem Ablauf aller zeitlichen Veränderungen des Feldes eine vollständige, dann würde man zweifellos als Definition des zeitlichen Normalwertes, soweit die Einführung eines solchen dann noch notwendig wäre, eine möglichst einfache wählen. Trotz weitgehender Kenntnis der Ursachen zeitlicher Feldänderungen kann aber eine solche Definition zeitlicher Normalwerte heute nur eine konventionelle sein. Es ist üblich, als Normalwert in zeitlicher Hinsicht das Jahresmittel der magnetischen Feldgrößen zu verwenden.

Das Jahresmittel e_0 eines magnetischen Elementes e ist dabei definiert durch den Ausdruck

$$e_0 = \frac{1}{a} \int_{t_0 - \frac{a}{2}}^{t_0 + \frac{a}{2}} e\,(t)\, dt. \tag{7}$$

Im Jahresmittel ist nur mehr der langsam veränderliche Hauptteil des Feldes enthalten; die rasch veränderlichen Schwankungen des zeitlichen Feldverlaufes, die teils unregelmäßiger, teils periodischer Art sind, fallen bei ihm durch die Art der Mittelbildung heraus.

Der durch (7) definierte Mittelwert ist kein Momentanwert, aber doch eine Funktion der Zeit und dem Zeitpunkte t_0 zugeordnet. Läßt man den in den Grenzen des Integrals auftretenden Parameter t_0 die Zeitskala durchlaufen, so gibt das zugehörige $e_0\,(t)$ den zeitlichen Verlauf

des durch (7) definierten Normalwertes an. Dieser zeitliche Verlauf ist aber nun ein wesentlich einfacherer als der der wirklichen Momentanwerte der Feldgrößen. Er kann in relativ weiten Grenzen mit völlig ausreichender Genauigkeit als eine lineare Funktion der Zeit angesehen werden, bzw. ist bei größeren Zeiträumen durch eine quadratische Funktion darstellbar.

Die Bedeutung des Normalwertes für den zeitlichen Verlauf der Feldgrößen ist also die analoge wie die des terrestrischen Feldes für seine räumliche Darstellung. Wir ersetzen in beiden Fällen die wahren Werte durch andere, die mit ihnen in exakt definierter Weise zusammenhängen, sie im Rahmen bestimmter Genauigkeitsansprüche, die jeweils angebbar sind, vertreten und die rechnerisch in einfacher Weise zu verwenden sind.

Ein zeitlicher Mittelwert bezieht sich zwar auf einen gewissen Zeitpunkt, er hat aber, im Gegensatz zu einem Momentanwert, eine gewisse zeitliche Reichweite, die dem Momentanwert fehlt. Vermöge der Art seiner Herleitung ist er für den Zeitabschnitt, aus dem er abgeleitet wurde, repräsentativ. Seine zeitliche Reichweite hängt davon ab, in welcher Art die Funktion $e_0\,(t)$ in der Umgebung des Zeitpunktes t_0 verläuft.

Ein so weitreichend ausgeglichener Wert, wie ihn das Jahresmittel e_0 darstellt, zeigt eine zeitliche Abhängigkeit, an der wir heute zwei Anteile unterscheiden können. Der eine Anteil ist die Säkularvariation, der andere steht in Abhängigkeit von der Sonnenfleckenperiode und hat selbst periodischen Charakter. Über die Beschaffenheit der die Säkularvariation ausdrückenden Zeitfunktion wissen wir nur wenig.

Man hat ihr auch periodischen Charakter zugeschrieben, wobei sich aber für ihre Periodenlänge in verschiedenen Gebieten der Erde verschiedene Werte ergaben. Für Europa, für das auch die längsten Beobachtungsreihen vorliegen, fand sich so eine Periode von 480 bis 490 Jahren. Die zur Verfügung stehende Beobachtungszeit erdmagnetischer Vorgänge ist aber bei weitem nicht ausreichend, etwas über die Realität dieser gemutmaßten Periode auszusagen; ist doch seit dem Beginn dieser Beobachtungen noch nicht einmal eine volle Periode durchlaufen worden. Überdies fehlt es bis jetzt auch an einer physikalischen Erklärung des Phänomens der Säkularvariation. Aus diesem Grund kann über den Charakter der sie darstellenden Zeitfunktion nichts ausgesagt werden.

Möglicherweise läßt sich das Phänomen der Säkularvariation in Beziehung bringen zum inneren Wärmehaushalt der Erde. Nach der Theorie von J. Joly [2] über das Auftreten thermischer Zykeln übersteigt die aus Atomzerfall im Inneren der Erde produzierte Wärme die derzeitige Wärmeabgabe nach außen. Die Folgen dieses Wärmestaus im Inneren der Erde sind Aufschmelzvorgänge und Strukturänderungen in einem weiten Sinn dieses Wortes. Solche Vorgänge müssen auch, wenn sie stattfinden, den Magnetisierungszustand der Erde beeinflussen und verändern. Nach der Jolyschen Theorie wäre dann die Säkularvariation eine zyklische Erscheinung, aber nicht streng periodischer Art, da im Inneren der Erde einesteils konvektive Ströme vorhanden sind, andern-

teils zur Zeit gesteigerter Wärmeabgabe nach außen die feste äußere Erdkruste tiefgreifenden Veränderungen unterliegt.

Gelänge es also, die zeitliche Analyse des Feldes noch weiter zu treiben, so könnte man das Jahresmittel e_0 etwa in folgender Form dargestellt denken:

$$e_0 = e_{00} + e_s(t) + e_{sp} \sin(\alpha_{11} t + \omega_{11}), \tag{8}$$

wobei e_{00} einen vielleicht vorhandenen wirklich konstanten Anteil des Feldes, $e_s(t)$ die Zeitfunktion der Säkularvariation und e_{sp} den durch die Sonnentätigkeit erzeugten periodischen Anteil bedeutet. In diesem Fall wäre e_{00} der wirkliche, zeitunabhängige Normalwert, auf den alle Messungen zu beziehen wären. Vorläufig ist aber bloß der durch e_{sp} dargestellte Anteil sichergestellt; er kann noch abgetrennt werden, wenn an Stelle des Jahresmittels e_0 ein elfjähriger Mittelwert verwendet wird. Ad. Schmidt hat aus diesem Grunde vorgeschlagen, sich zur Ableitung der ungestörten Säkularvariation der übergreifenden Zehnjahresmittel, durch die man praktisch die Elfjahresmittel ersetzen kann, zu bedienen.

Bei der praktischen Ausführung der Vermessung werden an den einzelnen Punkten des Aufnahmegebietes nur ungleichzeitige Werte der magnetischen Elemente erhalten. Aus ihnen allein können die zur Darstellung des Feldzustandes für einen bestimmten Zeitpunkt nötigen Normalwerte zunächst nicht abgeleitet werden. Derartige Normalwerte (in zeitlicher Beziehung) können nur für solche Orte gebildet werden, für die der zeitliche Ablauf des Feldes dauernd bekannt ist, also für die magnetischen Observatorien.

Für irgend einen beliebigen Meßpunkt muß der Normalwert oder, was dasselbe ist, der zeitliche Ablauf des Feldes für diesen Punkt, interpolatorisch übertragen werden. Das hiefür anzuwendende Verfahren ist auf jeden Fall festzusetzen und anzugeben; denn durch die Art der zeitlichen Reduktion wird eine weitere Unsicherheit dem ursprünglichen Messungsergebnis hinzugefügt.

Die Übertragung der Normalwerte vom Orte des Observatoriums auf den Ort der Feldmessung ist dadurch möglich, daß in erster Näherung die zeitlichen Änderungen des Feldes innerhalb eines bestimmten Gebietes, dessen Größe wieder von der geforderten Genauigkeit abhängt, ungefähr gleichsinnig und gleichwertig verlaufen. Auf dieser wichtigen Eigenschaft des Feldes, in der wieder die verhältnismäßige Kleinheit unserer Vermessungsgebiete zum Ausdruck kommt, beruht überhaupt die Möglichkeit, die Feldmessungen zu reduzieren.

Bezeichnen also E und e gleichzeitige Momentanwerte für das Observatorium und die Feldstation, ist ferner E_0 der bekannte Normalwert für das Observatorium, e_0 der zu bestimmende Normalwert für die Feldstation, so gilt:

$$E - E_0 = e - e_0 + k(e) \tag{9}$$

wobei $k(e)$ eine für jedes Element zu bestimmende Korrektionsgröße ist. Je sicherer der durch $k(e)$ dargestellte Unterschied im zeitlichen Feldverlauf an den beiden Orten zu erfassen ist, um so kleiner wird der durch die Reduktion auf die Epoche begangene Fehler werden.

Die zeitlichen Veränderungen des Feldes setzen sich aus verschiedenen Bestandteilen zusammen; im wesentlichen sind es die periodischen Anteile der täglichen Gänge und die aperiodischen Störungsanteile. Die periodischen Anteile haben jeder für sich eine eigene Phasenzeit, die Störungsanteile verlaufen nach Weltzeit. Daraus folgt, daß es im strengsten Sinn für magnetische Messungen an zwei verschiedenen Orten keine Gleichzeitigkeit gibt. Im allgemeinen, d. h. unter normalen Umständen, werden die Störungsanteile gegenüber den periodischen Schwankungen des Feldzustandes zurücktreten.

Vom jeweiligen Feldzustand hängt nun auch die Reichweite eines Observatoriums, d. h. die Größe des Gebietes, innerhalb dessen seine Angaben für Reduktion der Feldmessungen bei bestimmten Genauigkeitsansprüchen verwendbar sind, ab. In erster Linie ändert sich die Reichweite mit dem jeweiligen Störungscharakter und kann im Falle sehr starker Störungen praktisch Null werden. Eingehendere und vor allem systematische Untersuchungen über den zeitlichen Ablauf der Feldzustände an Orten in verschiedener Entfernung sowie eine vielleicht vorhandene Abhängigkeit der zeitlichen Variationen von der Beschaffenheit des Untergrundes fehlen heute noch. Für die praktische Anwendbarkeit auf die Reduktionsverfahren können innerhalb des west- und mitteleuropäischen Raumes die vorhandenen Observatoriumsbeobachtungen selbst schon für die Beantwortung der Genauigkeitsfragen herangezogen werden, da sich ihre Reichweiten vielfach überschneiden.

Geht man von Momentanwerten zu Mittelwerten (Monats-, Jahresmittel) über, so steigt für diese in entsprechender Weise die Reichweite der Angaben eines einzelnen Observatoriums. Auch darin zeigt sich wieder die praktische Bedeutung des zeitlichen Mittelwertes gegenüber dem Momentanwert zur Beschreibung des Feldzustandes.

Der durch eine Landesaufnahme erhaltene mittlere Feldzustand im Aufnahmegebiet bezieht sich auf einen bestimmten Zeitpunkt, die Epoche der Aufnahme. Da nun die einzelnen Landesaufnahmen zu verschiedenen Zeitpunkten ausgeführt werden, ergibt sich die Notwendigkeit, vor Bearbeitung eines größeren Gebietes oder zur Darstellung des Feldzustandes auf der ganzen Erde, die einzelnen Teiluntersuchungen auf einen einheitlichen Zeitpunkt zu beziehen.

Dazu ist die Kenntnis der inzwischen erfolgten zeitlichen Veränderungen des mittleren Feldzustandes notwendig. Hiefür genügen die Angaben von verhältnismäßig wenigen Magnetwarten, da es sich hier ja um die Veränderung von Mittelwerten handelt. Schwierigkeiten praktischer Art ergeben sich aber auch hier bei der Überbrückung der weiten, ständig und regelmäßig beobachtender ortsfester Stationen entbehrenden Meeresräume sowie in den starken zeitlichen Störungen ausgesetzten Nordlichtzonen in der Umgebung der magnetischen Pole.

Allein auch innerhalb der übrigen Gebiete ist noch die Frage nicht ganz geklärt, ob die säkulare Änderung der Elemente nicht gewissen regionalen Unterschieden unterworfen ist, die mit Vorgängen im Innern der Erde im Zusammenhang stehen und die wir heute mangels eines

hinreichend dichten Beobachtungsnetzes nicht genügend sicher feststellen können. Verwendet man die Jolysche Zyklentheorie als erste Arbeitshypothese zur Erklärung der säkularen Änderung, so sind derartige Unterschiede durchaus möglich und denkbar.

Aber nicht nur aus diesem Grund, sondern auch wegen der praktischen Zweckmäßigkeit sind unter den Stationen 1. Ordnung der Landesaufnahme eine kleine Zahl von gut verteilten, möglichst störungsfreien Stationen als Säkularstationen auszuwählen und in bestimmten, nicht zu großen Zeitabständen regelmäßig wieder zu beobachten. Sie können dann in Verbindung mit den Angaben der Observatorien Aufschluß über den tatsächlichen Verlauf der säkularen Änderung geben, sie sind aber auch dazu bestimmt, die Vergleichbarkeit und den Anschluß verschiedener und zu verschiedenen Epochen beobachteter Landesnetze zu ermöglichen.

Über die heute tatsächlich erzielbare Genauigkeit bei der Darstellung mittlerer Feldzustände für ein großes Gebiet oder für die ganze Erde können wir noch keine befriedigenden, zahlenmäßigen Angaben machen. Diese werden erst dann möglich sein, wenn manche der hier nur kurz skizzierten und keineswegs lückenlos dargestellten Fragen geklärt sein werden. Dazu gehört aber in erster Linie die Wiederaufnahme der durch den Krieg stark gestörten internationalen Zusammenarbeit, vor allem die Kenntnis der Beobachtungsergebnisse aus den Jahren des Krieges. In den durch den Krieg unmittelbar betroffenen Gebieten Europas haben die dabei entstandenen Zerstörungen ebenso eine empfindliche Einbuße an Beobachtungseinrichtungen als auch das Aufhören einer geordneten Beobachtungstätigkeit mit sich gebracht. Eine möglichst rasche und umfassenden Wiederherstellung zerstörter Observatorien als auch der geordneten Beobachtungstätigkeit auf Grund internationaler Zusammenarbeit ist eines der dringendsten Erfordernisse.

Literaturverzeichnis.

1. Ad. Schmidt: Die magnetische Vermessung I. Ordnung des Königreiches Preußen 1898 bis 1903. Abh. d. kgl. Preuß. Met. Inst. Band IV, Nr. 12.
2. J. Joly: The theorie of thermal cycles. Gerlands Beitr. Geophys. **19**, 415 (1928).

551.594.5

(Lichtklimatisches Observatorium Arosa, Schweiz.)

Eine Anregung zur Nordlichtphotographie.

Von

F. W. Paul Götz.

Zusammenfassung. Es wird eine gewisse Synchronisierung der Nordlichtaufnahmen vorgeschlagen.

Summary. It is proposed to synchronize photographs of auroras in a certain manner.

Die neue Nordlicht-„Saison"[1] hat schon vor Eintritt des Sonnenfleckenmaximums fünf Nordlichter gebracht, am 28. März und 26. Juli 1946, 17. April, 17. Juli und 15. August 1947. Beim Nachhinken der Nordlichter hinter dem Maximum berechtigt sie zu weiteren Erwartungen. Für die besonders dringliche Höhenbestimmung von Nordlichtern mittlerer Breiten wäre natürlich eine direkte Verbindung nach norwegischem Vorbild am zweckmäßigsten, aber unter den heutigen Verhältnissen nicht immer zu verwirklichen. Die vom 1. bis 7. September 1947 in Lyon stattgehabte internationale Konferenz über Beziehungen zwischen den solaren und geophysikalischen Phänomenen hat sich darum zur Erhöhung der Chance auf gleichzeitige Aufnahmen auf folgenden Vorschlag geeinigt: Bei Benutzung einer Kleinbildkamera $f = 1{,}5$ und empfindlichsten panchromatischen Filmmaterials wird man etwa 20 Sekunden zu belichten haben, damit, was absolut notwendig ist, die Sterne noch angedeutet sind. Bei einer Belichtung von 20 Sekunden beginnt man jeweils genau zur vollen Minute, belichtet also beispielsweise 23 Uhr 7 Minuten 0 Sekunden bis 20 Sekunden MEZ. Man wählt die Erscheinungen, die bei guter Lichtstärke am weitesten nach Süden stehen und bevorzugt solche mit roter Färbung. Ihr Interesse an dem Vorschlag haben bisher erklärt die Observatorien Pic du Midi, de Haute Provence, Lyon; Schauinsland-Freiburg, Zugspitze; Jungfraujoch, Oberhelfenswil und Arosa. Für einen ersten Vergleich und Austausch der Beobachtungsprotokolle, denen außer der Zeit natürlich vor allem das Sternbild zu entnehmen sein muß, hält sich das Lichtklimatische Observatorium Arosa zur Verfügung.

[1] F. W. P. Götz, Prisma **2**, 243, 1947.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5.
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. F. Steinhauser, Wien V, Schloßgasse 14.
Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX. — 101/48/4/221.

Die Autoren erhalten eine erste Fahnenkorrektur, die sie nach erfolgter Durchsicht an den Verlag zu senden haben; eine Umbruchkorrektur wird den Autoren nicht zugestellt.

Die Mitarbeiter erhalten 50 Sonderdrucke ihrer Arbeit (ohne Umschlag) kostenlos; sie können eine beschränkte Anzahl weiterer Sonderdrucke gegen Entschädigung beziehen, müssen diese jedoch bei der Rücksendung der ersten Korrektur bestellen. Die Autoren von Originalarbeiten erhalten eine Unkostenentschädigung.

Manuskripte und Anfragen sind an einen der beiden unterzeichneten Herausgeber zu richten.

Dozent Dr. **W. Mörikofer**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium
Davos-Platz, Schweiz

Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Wien V, Schloßgasse 14, Österreich

Springer-Verlag
Wien I, Mölkerbastei 5
Österreich

Im August 1948 erscheint:

Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

Dozent Dr. **W. Mörikofer**
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium, Davos

Prof. Dr. **F. Steinhauser**
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien

Serie B:

Allgemeine und biologische Klimatologie

Band I, 1. Heft

Inhaltsverzeichnis: **Conrad, V. S.** A new Criterion of Relative Homogeneity of Climatological Series. — **Reuter, H.** Zur Hyperthermie der menschlichen Haut. — **Rathschüler, Else.** Über die Änderung des Tagesganges der Luftfeuchtigkeit mit der Höhe im Gebirge. — **Mörikofer, W.** Zur Terminologie in der Strahlungsforschung. — **Courvoisier, P.** und **H. Wierzejewski.** Beiträge zur Strahlungsmethodik : Die physikalischen Grundlagen der kalorischen Strahlungsmeßmethoden. — **Sauberer, F.** Bemerkungen zu Fragen der praktischen Strahlungskunde. — **Steinhauser, F.** Die Schneehöhen in den Ostalpen und die Bedeutung der winterlichen Temperaturinversion. — **Perl, Gertrud.** Über die Beziehung der Tagesmitteln der Bewölkung und relativer Sonnenscheindauer in den verschiedenen Klimagebieten der Schweiz. — **Kaiser, M.** Über den Einfluß künstlicher und natürlicher UV-Strahlen im Tierversuch. — **Auerswald, W.** und **H. Bornschein.** Untersuchungen über den Einfluß der operativen Temperatur auf Höhe und mittlere Streuung der Hauttemperatur verschiedener Körperregionen. — **Rathschüler, Else.** Der Einfluß eines Wasserfalls auf die Luftfeuchtigkeit der Umgebung.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie

Herausgegeben von

Prof. Dr. **R. v. Klebelsberg**, Innsbruck

Die Zeitschrift ist die Fortsetzung der „Internationalen Zeitschrift für Gletscherkunde" (begründet von E. Brücke, fortgeführt von Prof. Dr. R. v. Klebelsberg, Verlag Gebr. Borntraeger, Berlin) und dient der allseitigen Erforschung der Gletscher von einst und jetzt. Sie bringt in vier Sprachen (deutsch, englisch, französisch und italienisch) Originalarbeiten, kleine Mitteilungen, eine ausführliche Bibliographie des Gesamtgebietes, Kartenbeilagen, Buchbesprechungen. — Sie erscheint nach Maßgabe des einlaufenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von etwa 400 Seiten vereinigt werden

Im August 1948 erscheint:

Band I, 1. Heft

Mit 44 Abbildungen. Etwa 100 Seiten

Inhaltsverzeichnis: **Kinzl, H.** Die Vergletscherung in der Südhälfte der Cordillera Blanca (Peru). Begleitworte zu einer stereophotogrammetrischen Karte 1:100.000. — **Pillewizer, W.** Zur Frage jahreszeitlicher Schwankungen in der Geschwindigkeit der Gletscherbewegung. Auf Grund von Untersuchungen am Mittelbergferner im Pitztal. — **Paschinger, V.** Profiländerungen der Pasterze (Glocknergruppe) 1848 bis 1942. — **Paschinger, V.** Die Firnmoräne der Pasterze. — **Morawetz, S.** Die Postglaziale Wärmezeit und die Vergletscherung der zentralen Ostalpen. — **Wegener, K.** Die Ursachen der Abtragung (Ablation) der Gletscher. — **Klein, S.** Restzeugen alter Vereisungen auf der oberbayerischen Hochebene westlich München. — **Klebelsberg, R. v.** Spuren eiszeitlicher Lokalvergletscherung in den Luganer Bergen (Südschweiz). — **Klebelsberg, R. v.** Die Gletscher der österreichischen Alpen 1942 bis 1946. — Buchbesprechungen

Handbuch der Gletscherkunde und Glazialgeologie

Von

Prof. Dr. **R. v. Klebelsberg**, Innsbruck

Erster Band: **Allgemeiner Teil**

Zweiter Band: **Historisch-regionaler Teil**

Mit 90 Abbildungen. Etwa 1000 Seiten

Beide Teile bilden zusammen ein organisches Ganzes; sie werden nur zusammen abgegeben

Vorbestellpreis für den 1. Band, gültig bis zum Erscheinen des 2. Bandes, in Österreich S 156.—, geb. S 165.—; im Ausland sfr. 68.—, geb. sfr. 72.—

Vorbestellpreis für den 2. Band, gültig bis zum Erscheinen des Bandes, in Österreich S 224.—, geb. S 233.—; im Ausland sfr. 98.—, geb. sfr. 102.—

Nach Erscheinen des 2. Bandes im Herbst 1948 beträgt der Preis für das Gesamtwerk in Österreich S 422.—, geb. S 460; im Ausland sfr. 192.—, geb. sfr. 200.—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria